NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909590 3

Digitized by Google

1. Trigonometry, Spherical, 1828

CA1

Trigonometry (Spherical)

Die Sphärik

oder

die Geometrie der Kugelfläche

in drei Theilen.

Von

Karl Friedrich Schulz,
Doktor der Philoſophie und Konrektor am Gymnaſium in Kottbus.

Erſter Theil.
Die geometriſche Sphärik.

Mit fünf Kupfertafeln.

Leipzig, 1828.
Bei Carl Cnobloch.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

Digitized by Google

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Digitized by Google

Seinem

theuren Freunde

Herrn Inſpektor Dr. Reydeker

widmet dieſe Blätter

aus wahrer Hochachtung und Liebe

der Verfaſſer.

Vorrede.

Aus der Natur der Kugelfläche läßt ſich a priori ſchließen, daß eine Geometrie derſelben ſowohl dem Umfange nach ausgedehnter, als dem Inhalte nach viel reichhaltiger ſeyn müſſe, als die Geometrie der Ebne; ja daß dieſe im Allgemeinen aus jener ſich muß ableiten laſſen, weil jede ſphäriſche Figur, wenn ſie unendlich klein gedacht wird, als ebne zu betrachten iſt, alſo die Eigenſchaften unendlich kleiner ſphäriſcher Figuren die der ebnen ergeben müſſen, wenn überhaupt die Eigenſchaften der ſphäriſchen Figuren bekannt ſind. Wirft man indeß nur einen oberflächlichen Blick auf dieſe Wiſſenſchaft in ihrem gegenwärtigen Zuſtande, ſo wird man geſtehen, daß ſie gar weit hievon entfernt iſt und daß ſie in Vergleich mit der ebnen und der körperlichen Geometrie ungleich geringere Fortſchritte gemacht hat. Nicht einmal in der Lehre von der Gleichheit der ſphäriſchen Dreiecke liefert ſie die Analogieen zu allen planimetriſchen Sätzen

deſſelben Gegenſtandes*); vergebens ſieht man ſich nach Sätzen um, aus denen ſich die Gleichheit der ebnen Parallelogramme oder Dreiecke, die auf einerlei Grundlinien und zwiſchen einerlei Parallelen liegen, oder, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, ableiten ließen; — da doch aus dem von Lexell gefundenen intereſſanten Satze, daß die Spitzen derjenigen ſphäriſchen Dreiecke, welche eine gemeinſchaftliche Grundſeite und gleichen Flächenraum haben, in der Peripherie eines kleineren Kreiſes liegen**) — die Möglichkeit ſolcher Sätze hervorgeht.

Die Urſache der Vernachläſſigung dieſer Wiſſenſchaft iſt wohl darin zu ſuchen, daß man in der Aſtronomie und in der mathematiſchen Geographie, welchen Wiſſenſchaften die Sphärik ohne Zweifel ihre Entſtehung verdankt, mit einigen Sätzen über die Kugelſchnitte und ſphäriſchen Dreiecke befriedigt und durch das Bedürfniß nicht weiter angeregt wurde, die Sphärik mit

*) Einen Beleg hiezu giebt v. Forſtner in ſeiner ſphäriſchen Geometrie (Berlin, 1827), wenn er S. 59 ausdrücklich bemerkt, daß es in der ſphäriſchen Geometrie keinen Satz gebe, um zu beweiſen, daß ein ſphäriſches gleichſchenkliges Dreieck durch das von der Spitze auf die Grundſeite gefällte Perpendikel in zwei gleiche Dreiecke zerlegt werde!

**) Nova Acta Petropol., T. V. p. 1. — Legendre theilt den Satz in ſeinen Éléments de Géométrie (12me éd.) S. 320 mit.

größerer Aufmerkſamkeit zu bearbeiten. Daher iſt es die ſphäriſche Trigonometrie, welche vorzugsweiſe mit der Aſtronomie ſich entwickelt und bedeutend vervollkommnet hat. Wie aber die ebne Geometrie, anfangs nur fremden Zwecken, durch welche ſie — wie der Name lehrt — zum Daſeyn gelangte, untergeordnet, ſich zu einer ſelbſtſtändigen Wiſſenſchaft erhoben hat, ſo gebührt auch der Sphärik dieſe wiſſenſchaftliche Selbſtſtändigkeit. Die erſten Schritte dazu, und für lange Zeit die einzigen, haben Theodoſius und Menelaus in ihren drei Büchern der Sphärik gethan. Dieſe Werke indeß, wenn ſchon für die Zeit ihrer Verfaſſer verdienſtlich genug, ſind wegen der Schwerfälligkeit der Entwickelung und Darſtellung, wegen ſo mancher unfruchtbaren, zu keinem nutzbaren Reſultate führenden Unterſuchungen, die in beiden die Geduld des Leſers ohne Befriedigung laſſen*), keinesweges geeignet, ein beſonderes Intereſſe für eine Wiſſenſchaft zu wecken, neben welcher ſo viele andere Gebiete der Mathematik ungleich größeren Genuß gewähren. Mit Recht ſind daher in unſern mathematiſchen Lehrbüchern jene Sätze überall ausgeſchloſſen.

Das Bedürfniß einer Bearbeitung der Sphärik nach der oben angedeuteten Idee iſt unterdeß mehr und mehr rege und laut geworden. In dieſem Sinne gab Pohl ſeine ſphäriſche Geometrie (Berlin 1819) und

*) Dahin gehören beſonders die Sätze über die Verhältniſſe der Bogen.

v. Forſtner das ſchon erwähnte Werk heraus. Müſſen gleich die gegenwärtigen Mängel der Wiſſenſchaft in einer ſolchen Stellung derſelben am deutlichſten in die Augen fallen, ſo darf dies neue Verſuche nicht zurückſchrecken, die, wenn auch nicht ſogleich das gewünſchte und zu wünſchende Reſultat erreicht wird, doch wenigſtens neue Anregung zu ferneren vielleicht glücklichern Bearbeitungen einer an ſich ſo intereſſanten Wiſſenſchaft geben können.

Veranlaßt durch eine im Jahr 1824 von der philoſophiſchen Fakultät zu Halle aufgeſtellten Preisaufgabe über die zweideutigen Fälle, welche bei der Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke vorkommen, und aufgemuntert durch die günſtige Aufnahme der von mir 1825 darüber gelieferten Abhandlung*), habe ich ſeitdem beſonders mit der Sphärik mich beſchäftigt und übergebe hiemit dem öffentlichen Urtheile einen Theil der Reſultate meiner Unterſuchungen. Bei der Verſchiedenartigkeit derſelben iſt eine Eintheilung der Sphärik nothwendig. Die natürlichſte ſcheint die Unterſcheidung derſelben in die niedere und in die höhere zu ſeyn, von denen jene nur die Kreiſe auf der Kugelfläche und die aus Bogen ſolcher Kreiſe zuſammengeſetzten Figuren behandelt; dieſe aber die übrigen auf der Kugelfläche irgendwie erzeugten

---

*) De casibus ambiguis, qui in resolutione triangulorum sphaericorum occurrunt etc. commentatio, ab Academia Frider. Halens. et Viteb. consoc. praemio ornata. Halae apud E. Anton. 1826.

Kurven unterſucht. Die niedere Sphärik zerfällt dann wieder in zwei Theile, die zwar dieſelben Gegenſtände, aber auf verſchiedene Weiſe behandeln. Man kann ſich nämlich darauf beſchränken, ohne Hülfe eigentlicher Rechnung, blos durch geometriſche Betrachtung, die Eigenſchaften der Kugelkreiſe und der daraus gebildeten Figuren zu entwickeln und durch Konſtruktion die geſuchten Größen zu beſtimmen; oder man bedient ſich dazu der Rechnung mit den trigonometriſchen Hülfsgrößen. Erſteres erzeugt die geometriſche, letzteres die trigonometriſche Sphärik, zu der die ſphäriſche Trigonometrie gehört. Dem Inhalte nach ergänzen ſich beide. Vorliegendes Werkchen enthält die geometriſche Sphärik.

Die Zahl der hier aufgenommenen Sätze und Aufgaben hätte ſich zwar um ein Bedeutendes vermehren laſſen; indeß war mein Grundſatz, nur das Wichtigere und das zur Entwickelung eines ſolchen Nöthige aufzunehmen und als ein zuſammenhängendes Ganze möglichſt einfach darzuſtellen. Zwei Hauptelemente der Sphärik, durch welche dieſe Wiſſenſchaft in ihrer Eigenthümlichkeit charakteriſirt wird und die daher in der Darſtellung beſtimmt hervortreten müſſen, liegen in der Polarität und in der Entgegengeſetztheit der ſphäriſchen Figuren. Es iſt in der That zu verwundern, wie die ſo höchſt intereſſante und in ihren Folgen ſo wichtige Eigenſchaft, nach welcher jedes ſphäriſche Polygon, jede Kurve ein Polarpolygon, eine Polarkurve hat, bisher überſehen werden konnte, da von dem ſchon längſt be-

kannten Polardreiecke der Schritt nur klein iſt. Die andere Eigenſchaft der ſphäriſchen Figuren beruht darauf, daß jeder Punkt der Kugelfläche einen Gegenpunkt, mithin jeder Bogen, jeder Winkel einen Gegenbogen, Gegenwinkel, jede Figur eine Gegenfigur hat, welche aus den Gegenpunkten der auf dem Umfange einer Figur liegenden Punkten beſteht und die mit dieſer Figur gleiche Theile in gleicher Aufeinanderfolge, aber nach entgegengeſetzter Richtung verbunden, enthält. Die Sätze von der Gleichheit der ſphäriſchen Dreiecke und Polygone werden dadurch ſehr vereinfacht und von dem körperlichen Winkel unabhängig überall auf Kongruenz, entweder mit dem gegebenen Dreiecke oder Polygone ſelbſt, oder mit dem Gegendreiecke oder Gegenpolygone deſſelben, zurückgeführt.

Da die Lehre von den Eigenſchaften der Dreiecke die Grundlage der ſphäriſchen, wie der ebnen Geometrie iſt, ſo habe ich dieſen Gegenſtand möglichſt vollſtändig zu behandeln geſucht. Nicht unbedeutende Erweiterungen wird man hier in den Sätzen über die ſogenannte Similarität (S. 35 — 40); in dem fünften und ſechſten Lehrſatze über die Gleichheit der Dreiecke (S. 41 u. f.); über Dreiecke und ſphäriſche Parallelogramme von gleichen Flächenräumen (S. 99 u. f.) u. a. finden. Die Entſcheidung der zweideutigen Fälle iſt auf ein ſo einfaches Geſetz zurückgeführt, daß ſie bei ſphäriſchen Dreiecken eben ſo leicht, als bei ebnen iſt.

Wenn ich zuweilen eine eigne Terminologie mir er-

laubt habe, ſo geſchah dies nur der Kürze wegen, oder wenn der übliche Ausdruck nicht paſſend, oder ein ſolcher mir nicht bekannt war. Aus dem erſten Grunde wählte ich für den größten Kreis die kürzere und im Laufe der Rede bequemere Benennung: Hauptkreis, und verwarf aus dem zweiten Grunde die dafür auch gebräuchliche: Normalkreis; weil dieſe Benennung richtiger und der in der ebnen Geometrie vorkommenden Normale analog, demjenigen Hauptkreiſe, der auf dem Berührungskreiſe einer ſphäriſchen Kurve im Berührungspunkte ſenkrecht ſteht, beigelegt wird. Für den ſogenannten kleineren Kreis drang ſich mir der Ausdruck: Nebenkreis, in doppeltem Sinne auf; einmal, weil die Ebne dieſes Kreiſes nicht durch den Mittelpunkt der Kugel, ſondern neben demſelben vorbeigeht; dann aber, weil dieſer Kreis nicht von der Wichtigkeit, wie der Hauptkreis, iſt. — Die zur Unterſcheidung der beiden Pole eines Kreiſes gewählte Benennung des poſitiven und des negativen Poles iſt freilich willkührlich, jedoch dem Begriffe dieſer Ausdrücke nicht widerſtreitend, vielmehr nicht ohne deutſame Beziehungen. An ſich aber iſt dieſe Unterſcheidung, ſo wie die der beiden Seiten der Ebne und des Kreiſes, durchaus nicht unweſentlich und die einfachere, beſtimmtere Darſtellung, welche ſie möglich macht in der Entwickelung der Polarität, ſo wie mehrer anderer, bei dem Nebenkreiſe vorkommender Eigenſchaften, in die Augen fallend.

Noch muß ich bemerken, daß der letzte Abſchnitt

über die ſphäriſchen Netze aus den von Legendre in ſeinen oben erwähnten Eléments d. G. S. 307 gegebenen Bemerkungen über die Polyeder entſtanden und nur eine weitere Ausführung jener Andeutungen iſt.

Möchte es mir gelungen ſeyn, durch dieſen Verſuch zur Förderung einer ſchönen, nur leider! weniger beachteten Wiſſenſchaft, der ich die angenehmſten Stunden meiner Muße verdanke, Etwas beigetragen zu haben!

Kottbus, im März 1828.

Schulz.

Einleitung.

1) Die Sphärik iſt derjenige Theil der Geometrie, in welchem die Eigenſchaften der auf einer Kugelfläche verzeichneten Figuren betrachtet werden. Sie läßt ſich eintheilen in die niedere und in die höhere Sphärik. Jene, die niedere Sphärik, beſchränkt ſich auf die Betrachtung der Kreiſe und der aus Bogen ſolcher Kreiſe gebildeten Figuren auf der Kugelfläche. Dieſe, die höhere, beſchäftigt ſich mit den Eigenſchaften der übrigen krummen Linien, welche auf der Kugelfläche erzeugt werden.

Die niedere Sphärik kann in Rückſicht der Hülfsmittel, welche zur Erreichung ihres Zweckes angewendet werden, wiederum in die geometriſche und in die trigonometriſche oder algebraiſche getheilt werden, je nachdem die vorliegenden Größen blos durch geometriſche Konſtruktion dargeſtellt, oder mit Hülfe der trigonometriſchen Funktionen durch Rechnung beſtimmt werden. Zu der letzteren gehört die ſphäriſche Trigonometrie. — Gegenwärtiges Werkchen behandelt die geometriſche Sphärik.

2) Was das Verhältniß der Sphärik zu der ebenen Geometrie und der Stereometrie betrifft, ſo ſetzt ſie beide Wiſſenſchaften voraus. Denn wenn auch die niedere Sphä-

rik unabhängig von der Lehre des körperlichen Winkels vorgetragen werden kann und muß, ſo ſteht ſie doch zu demſelben, ſo wie zu den Polyedern überhaupt, in einer ſo genauen Beziehung, daß ihr Sinn erſt dann vollſtändig begriffen wird, wenn die Kenntniß jener vorhanden iſt. In weiterem Umfange aber nimmt die höhere Sphärik die Kenntniß der Stereometrie in Anſpruch; ſie ſetzt z. B. die Bekanntſchaft mit dem Kegel und dem Cylinder voraus bei Betrachtung der ſphäriſchen Kegelſchnitte. Daß auch die höhere Geometrie der Ebne dieſem Theile der Sphärik vorausgegangen ſey, iſt wenigſtens naturgemäß und ſchon deshalb zu wünſchen, weil durch ſie die ſphäriſchen Kurven ein beſonderes Intereſſe gewinnen.

Anmerk. Aus dem Angedeuteten läßt ſich abnehmen, daß das Gebiet der Sphärik ein viel ausgedehnteres, als das der ebenen Geometrie iſt, welche aus jener ſich als ein beſonderer Fall ableiten läßt, wenn die Kugelfläche als unendlich groß, die Figuren auf derſelben aber endlich, oder wenn jene als endlich, dieſe als unendlich klein gedacht werden.

Von den Kreiſen auf der Kugelfläche.

§. 1.

Erklärungen. 1) Die Kugel iſt derjenige Körper, deſſen Oberfläche in allen ihren Punkten eine und dieſelbe Entfernung von einem innerhalb der Kugel liegenden Punkte hat, welcher der Mittelpunkt der Kugel heißt.

2) Die gerade Linie, welche den Abſtand des Mittelpunktes von der Kugelfläche mißt, heißt der Radius oder Halbmeſſer; und die gerade Linie, welche, durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, zwei Punkte der Kugelfläche verbindet, der Durchmeſſer der Kugel.

Zuſatz. Aus 1. folgt, daß alle Radien einer Kugel gleich ſind, und da jeder Durchmeſſer der Summe zweier

Radien gleich iſt, daß auch alle Durchmeſſer einer Kugel von gleicher Länge ſind.

§. 2.

Lehrſatz. Durch eine gerade Linie wird die Kugelfläche in zwei Punkten geſchnitten.

Beweis. Es ſey (Figur 1.) AB die gerade Linie, M der Mittelpunkt der Kugel, und A ein Durchſchnittspunkt der geraden Linie mit der Kugelfläche. Man fälle von M ein Perpendikel auf AB, welches dieſelbe in C treffe; nehme CB=AC und MB; ſo iſt das Dreieck MCB≌MBA; daher MB=MA; folglich auch B ein Punkt der Kugelfläche. Alſo ſchneidet die Gerade AB in zwei Punkten die Kugelfläche.

Zuſatz 1. Jede von M auf AB gezogene gerade Linie, welche zwiſchen A und B eintrifft, iſt kleiner als MA; daher liegt der Theil AB der ſchneidenden Linie ganz innerhalb der Kugel.

Zuſatz 2. Ein dritter Durchſchnitt iſt nicht möglich, weil von einem Punkte nach einer geraden Linie nur zwei gleiche Linien möglich ſind.

Zuſatz 3. Fällt C in A, ſo iſt CB=CA=0. Beide Durchſchnitte fallen alſo in Einen zuſammen, und die Linie AB iſt eine Tangente. Iſt MC größer, als der Radius der Kugel, ſo kann die Gerade AB gar nicht die Kugelfläche treffen, weil jede andre Linie von M nach AB länger als die kürzeſte MC iſt.

Zuſatz 4. Geht die ſchneidende Linie durch den Mittelpunkt der Kugel, ſo iſt der in der Kugel befindliche Theil derſelben ein Durchmeſſer.

Die Durchſchnittspunkte eines Durchmeſſers mit der Kugelfläche nennen wir Gegenpunkte.

Zuſatz 5. Jeder Punkt der Kugelfläche hat einen, und nur einen Gegenpunkt.

§. 3.

Lehrſatz. Der Durchſchnitt einer Ebne mit der Kugelfläche iſt ein Kreis.

Beweis. Es ſey (Figur 2.) CDFE der Durchſchnitt einer Ebne mit der Kugelfläche. Von dem Mittelpunkte A der Kugel fälle man eine Senkrechte AB auf die Ebne ECDF; von dem Punkte B, in welchem ſie die Ebne trifft, ziehe man in derſelben Ebne die Geraden BC, BD bis zu den Durchſchnitten C, D mit der Krummen ECDF; die Punkte C, D verbinde man mit dem Mittelpunkte A der Kugel durch die Radien AC, AD. So entſtehen die an B rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD, deren Kongruenz aus der Gleichheit ihrer Hypotenuſen AC, AD, (Radien der Kugel) und der gemeinſchaftlichen Kathete AB erhellt. Daraus folgt: BC = BD. Da nun D jeder beliebige Punkt des Durchſchnittes ſeyn kann, ſo haben alle Punkte des in einer Ebne liegenden Durchſchnittes gleichen Abſtand von B. Mithin iſt derſelbe ein Kreis, deſſen Mittelpunkt B iſt.

Zuſatz 1. Das Perpendikel AB, die Entfernung der Kreisebne vom Mittelpunkte der Kugel, ſey mit d, der Radius BD mit r, der Kugelradius mit R bezeichnet. Zwiſchen R, r, d beſteht nun die Gleichung

$$d^2 + r^2 = R^2;$$

aus welcher erſichtlich iſt, daß r abnimmt, wenn d größer wird, und r wächſt, wenn d abnimmt. In Worten: Je näher die Kreisebne dem Mittelpunkte der Kugel ſteht, deſto größer iſt der Kreis; je entfernter jene, deſto kleiner dieſer.

Zuſatz 2. Iſt d = R; ſo iſt r = 0. Der Kreis wird alſo ein Punkt und die Ebne berührt blos die Kugel. Iſt d > R, ſo wird r unmöglich; die Ebne kann die Kugelfläche gar nicht treffen.

Zuſatz 3. Iſt d = 0, ſo iſt r = R; der größte Werth, welchen r haben kann. Der Kreis alſo, deſſen Ebne durch den Mittelpunkt der Kugel geht, iſt größer als jeder andre; ſein Radius iſt dem der Kugel gleich. Solche Kreiſe nen-

nen wir Hauptkreiſe, während diejenigen, deren Ebnen nicht durch der Kugel Mittelpunkt gehen, Nebenkreiſe heißen mögen.

Da bei jedem Hauptkreiſe $r = R$ iſt, ſo ſind alle Hauptkreiſe einander gleich.

Zuſatz 4. Alle Kreiſe, deren Ebnen vom Mittelpunkt der Kugel gleiche Entfernung haben, ſind einander gleich.

§. 4.

Lehrſatz. Zwei Kreiſe auf der Kugelfläche müſſen entweder ſich ſchneiden und zwar in zwei Punkten, oder ſie berühren ſich nur in einem Punkte, oder ſie treffen ſich gar nicht.

Beweis. Zwei Kreiſe auf der Kugelfläche können nur ſolche Punkte mit einander gemein haben, welche in der Durchſchnittslinie ihrer beiden Ebnen und auf der Kugelfläche liegen. Sie müſſen aber auch jeden Punkt gemein haben, dem dieſe beiden Merkmale zukommen; denn liegt ein Punkt in einer Ebne und auf der Kugelfläche, ſo gehört er zu dem Kreiſe, den dieſe Ebne mit der Kugelfläche bildet. Daher liegt jeder Punkt, der zur Durchſchnittslinie beider Ebnen und zur Kugelfläche gehört, in jedem der beiden Kreiſe, welche die Durchſchnitte jener Ebnen mit der Kugel ſind. Da aber die gerade Linie, in welcher die Ebnen der beiden Kreiſe ſich ſchneiden, entweder in zwei Punkten die Kugelfläche ſchneiden, oder ſie nur in einem Punkte berühren, oder ſie gar nicht treffen muß, ſo folgt, daß die Kreiſe auf der Kugel entweder in zwei Punkten ſich begegnen, oder nur in einem, oder in keinem.

Zuſatz 1. Hauptkreiſe ſchneiden ſich immer in zwei Gegenpunkten. Denn ihre Ebnen, denen der Mittelpunkt der Kugel gemein iſt, ſchneiden ſich in einem Durchmeſſer der Kugel, deſſen Endpunkte Gegenpunkte ſind.

Zuſatz 2. Geht ein Hauptkreis durch einen Punkt a

der Kugelfläche, ſo geht er auch durch deſſen Gegenpunkt a'. Denn ein zweiter durch a gehender Hauptkreis ſchneidet ſich mit dem erſten in zwei Gegenpunkten, und a hat nur einen Gegenpunkt.

Zuſatz 3. Geht ein Kreis durch zwei Gegenpunkte, ſo iſt er ein Hauptkreis. Denn in ſeiner Ebne liegt die gerade Linie, welche, die Gegenpunkte verbindend, durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Folglich geht die Ebne durch den Mittelpunkt der Kugel.

§. 5.

Lehnſatz. Wenn zwei zu verſchiedenen Kreiſen gehörige Bogen, von denen jeder kleiner als ein Halbkreis iſt, gleiche Sehnen haben, ſo iſt von dieſen Bogen derjenige, welcher zu dem größern Kreiſe gehört, der kleinere.

Beweis. Es ſeyen (Figur 3.) ADB und AD'B zwei Bogen, welche die Sehne AB gemein haben und der Radius DC des Bogens ADB ſey größer, als der Radius D'C' des Bogens AD'B. Verbindet man die Endpunkte der Bogen mit den Mittelpunkten ihrer Kreiſe durch Radien CA, CB; C'A, C'B, und zieht CA' parallel mit C'A, CB' ∥ C'B; ſo iſt der Bogen A'DB' ähnlich dem Bogen AD'B; daher iſt

$$\frac{A'DB'}{A'B'} = \frac{AD'B}{AB}.$$

Da aber Bogen A'DB' > ADB, ſo iſt

$$\frac{A'DB'}{A'B'} > \frac{ADB}{AB}; \text{ folglich auch}$$

$$\frac{AD'B}{AB} > \frac{ADB}{AB};$$

folglich AD'B > ADB.

Zuſatz 1. Der andre Theil AF'B des kleineren Kreiſes iſt > AD'B, daher auch > ADB. Der Satz iſt alſo

auch dann gültig, wenn der Bogen des kleineren Kreiſes nicht kleiner als ein Halbkreis iſt.

Zuſatz 2. Wie der Bogen ADB kleiner iſt, als jeder der beiden Theile des kleineren Kreiſes; ſo iſt der andre Theil AFB des größern Kreiſes größer als jene.

§. 6.

Lehrſatz. Wenn zwei Punkte der Kugelfläche durch Bogen verſchiedener Kreiſe verbunden werden, ſo iſt derjenige Bogen der kleinere, deſſen Ebne vom Mittelpunkte der Kugel eine kleinere Entfernung hat.

Beweis. Es ſeyen (Figur 4.) A, B zwei Punkte der Kugelfläche und durch dieſelben mehrere Kreiſe gelegt.

Die Ebnen dieſer Kreiſe ſchneiden ſich in der geraden Linie AB, die alſo gemeinſchaftliche Sehne der verſchiedenen Bogen iſt. Da nun derjenige Kreis, deſſen Ebne eine kleinere Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel hat, der größere iſt, und unter den eine gemeinſchaftliche Sehne habenden Bogen der zum größern Kreiſe gehörige der kleinere iſt (§. 5.); ſo iſt die Behauptung evident.

Zuſatz 1. Da der Hauptkreis durch A, B der größte unter allen iſt, ſo iſt der Bogen deſſelben zwiſchen A und B der kleinſte.

Zuſatz 2. Durch zwei Punkte der Kugelfläche, die nicht Gegenpunkte ſind, kann nur ein Hauptkreis gelegt werden. Denn ginge durch die Punkte A, B noch ein zweiter Hauptkreis, ſo würde er außer A, B auch deren Gegenpunkt A′, B′, alſo vier Punkte mit dem erſten Hauptkreiſe gemein haben (§. 4. Zuſ. 2.), was nicht möglich iſt.

Direkt folgt es auch daraus, daß die Ebnen beider Hauptkreiſe durch A und B zuſammenfallen müſſen, weil ſie drei Punkte, A, B, und den Mittelpunkt der Kugel gemein haben.

Anmerk. Wegen Zuſ. 1. und Zuſ. 2. wird der Bogen des

Hauptkreiſes als das Maaß der ſphäriſchen Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche betrachtet.

Zuſatz 3. Die (ſphäriſche) Entfernung zweier Gegenpunkte von einander iſt ein halber Hauptkreis. Denn der Kugeldurchmeſſer, an deſſen Enden die beiden Gegenpunkte liegen, iſt zugleich der Durchmeſſer des durch ſie gelegten Hauptkreiſes, den er alſo halbirt.

Zuſatz 4. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Figur 5.) von einander iſt der Entfernung ihrer Gegenpunkte A′ und B′ gleich. Denn legt man durch A und B einen Hauptkreis, der auch durch A′ und B′ geht (§. 4. Zuſ. 2.), ſo iſt Halbkreis ABA′=BA′B′; daher nach Abzug von BA′, AB=A′B′.

Zuſatz 5. Jeder Punkt zwiſchen A und B findet ſeinen Gegenpunkt zwiſchen A′ und B′, der eben ſo weit von A′ oder B′ abſteht, als jener von A oder B.

Anmerk. Man kann daher ſolche Bogen, wie AB, A′B′, Gegenbogen nennen.

§. 7.

Erklärung. Macht man die Gerade AB (Figur 2.), welche die Entfernung der Ebne eines Kreiſes von dem Mittelpunkte der Kugel mißt, durch Verlängerung nach beiden Seiten zu einem Durchmeſſer, ſo heißt dieſer auf der Kreisebne in dem Mittelpunkte ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer die Achſe des Kreiſes, und die beiden Gegenpunkte, in welchen die Achſe der Kugelfläche begegnet, heißen die Pole deſſelben Kreiſes, die wir ſo unterſcheiden wollen, daß wir den einen, gleichviel welchen, den poſitiven, den andern den negativen Pol nennen.

Zuſatz 1. Jeder Kreis hat nur eine Achſe, weil von dem Mittelpunkte der Kugel auf ſeine Ebne nur ein Perpendikel fällt; aber eine Achſe gehört zu allen den Kreiſen, deren Ebnen mit einander parallel ſind und von denen einer jene Achſe hat.

Solche Parallelkreiſe alſo haben zwar ſtets eine gemeinſchaftliche Achſe und daher auch gemeinſchaftliche Pole. Da aber unter dieſen parallelen Ebnen nur eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und auf Ebnen, die ſich ſchneiden (wie die der Hauptkreiſe), eine und dieſelbe grade Linie nicht ſenkrecht ſeyn kann; ſo findet unter den Hauptkreiſen keine Gemeinſchaft der Achſen und Pole ſtatt.

Zuſatz 2. Setzt man auf die Ebne eines Kreiſes ſenkrecht die Ebne zweier Hauptkreiſe, ſo iſt der Durchſchnitt der beiden Ebnen die Achſe und die Durchſchnitte der Hauptkreiſe ſind die Pole jenes Kreiſes.

§. 8.

Lehrſatz. Jeder Pol eines Kreiſes iſt von allen Punkten der Peripherie deſſelben gleich weit entfernt.

Beweis. Es ſey (Figur 6.) DAA'E ein Kreis, deſſen Achſe PQ die Ebne deſſelben in B ſchneidet. Die Entfernung des Poles P von den beliebigen Punkten A, A' der Peripherie wird durch die Bogen PA, PA' der Hauptkreiſe PAQ, PA'Q gemeſſen. (§. 6. Anmerk.)

Die Ebnen dieſer Hauptkreiſe ſchneiden die Ebnen des Kreiſes DAA'E in den auf PQ Senkrechten AB, A'B, welche als Radien einander gleich ſind. Zieht man die Kugelradien AC, A'C, ſo ſind die Dreiecke ABC, A'BC wegen Gleichheit aller Seiten kongruent; daher die Zentriwinkel ACB, A'CB und folglich auch die Bogen derſelben AP, A'P einander gleich.

Aus AP = A'P folgt für den andern Pol AQ = A'Q.

Anmerk. Man kann daher die Pole eines Kreiſes auf der Kugel die ſphäriſchen Mittelpunkte und die Bogen AP, AQ die ſphäriſchen Radien deſſelben nennen, von welchen Radien dann jeder das Supplement des andern iſt.

Wird künftig ſchlechthin von dem Mittelpunkte eines ſolchen Kreiſes geſprochen, ſo ſoll damit der nächſte Pol, alſo unter dem Radius der kleinere von den beiden gemeint ſeyn.

Zuſatz 1. Alle Punkte, welche einerlei Entfernung von einem Punkte P der Kugelfläche haben, liegen in einem ebenen Kreiſe. Denn man lege durch zwei jener Punkte A, A' eine Ebne ſenkrecht auf die grade Linie, welche von P nach dem Mittelpunkte C der Kugel geht. Der Schnitt dieſer Ebne mit der Kugelfläche iſt ein Kreis, deſſen Mittelpunkt P, und deſſen Radien alle $= PA = PA'$ ſind, in deſſen Peripherie alſo alle jene um PA von P entfernten Punkte liegen.

Zuſatz 2. Je kleiner BC iſt, deſto größer iſt der Winkel ACP; deſto größer alſo der Radius AP.

Fällt B mit C und demnach AB und AC mit der auf PQ Senkrechten aC zuſammen; ſo wird Winkel $ACP = aCP =$ einem Rechten, und der Radius aP ein Quadrant.

Der Radius (aP) des Hauptkreiſes iſt alſo ein Quadrant, deſſen Supplement (aQ) ebenfalls ein Quadrant iſt.

Zuſatz 3. Da gleiche Sehnen gleicher Kreiſe zu gleichen Bogen gehören, ſo kann man einen Kreis auf der Kugelfläche beſchreiben mit Hülfe eines Zirkels, deſſen Oeffnung die Sehne des (ſphäriſchen) Radius mißt. Auch wird man den ſphäriſchen Mittelpunkt eines Kreiſes finden, wenn man um zwei Punkte ſeiner Peripherie Kreiſe beſchreibt, deren Radien dem ſeinigen gleich ſind. Der Durchſchnitt dieſer Kreiſe innerhalb des vorliegenden muß der Mittelpunkt deſſelben ſeyn, weil dieſer in jedem der beiden Kreiſe liegt. Hieraus ergiebt ſich der Satz:

Iſt ein Punkt innerhalb eines Kreiſes auf der Kugelfläche von zwei Punkten der Peripherie um den (ſphäriſchen) Radius deſſelben Kreiſes entfernt, ſo iſt er der Mittelpunkt oder Pol deſſelben.

Zuſatz 3. Wird auf die Ebne eines Kreiſes ſenkrecht die Ebne eines Hauptkreiſes geſetzt, ſo geht der innerhalb des erſten Kreiſes liegende Bogen des Hauptkreiſes durch den Mittelpunkt deſſelben (§. 7. Zuſ. 2.), der alſo der Mittelpunkt dieſes ſphäriſchen Durchmeſſers iſt.

Zuſatz 4. Aus Zuſ. 2. und Zuſ. 3. ergiebt ſich für Hauptkreiſe insbeſondere:

1) Der Mittelpunkt oder Pol eines Hauptkreiſes iſt derjenige Punkt, welcher von zwei Punkten der Peripherie deſſelben um einen Quadranten abſteht.

2) Der Endpunkt des Quadranten, deſſen Ebne auf der Ebne eines Hauptkreiſes ſenkrecht ſteht, iſt der Pol dieſes Hauptkreiſes.

Anmerk. Doch iſt in 1. nicht zu überſehen, daß die dort erwähnten zwei Punkte nicht Gegenpunkte ſeyn dürfen; weil die um dieſelben als um Pole beſchriebenen Hauptkreiſe nicht von einander verſchieden ſeyn können (§. 7. Zuſ. 1.), ſondern zu einen zuſammenfallen, alſo keinen Durchſchnittspunkt geben, wie in Zuſ. 1.

§. 9.

Lehrſatz. Wenn mehrere Kreiſe ſich in denſelben zwei Punkten ſchneiden, ſo liegen ihre Pole in einem und demſelben Hauptkreiſe.

Beweis. Schneiden ſich mehrere Kreiſe in denſelben zwei Punkten, ſo haben ſie die zwiſchen denſelben enthaltene geradlinige Sehne gemein. Da nun die Achſe jedes Kreiſes auf der Ebne deſſelben ſenkrecht ſteht, ſo ſteht die Ebne je zweier Achſen auf dem Durchſchnitt der zugehörigen Kreisebnen, d. i. auf der gemeinſchaftlichen Sehne ſenkrecht. Daher müſſen die Ebnen, welche durch jede zwei Achſen gebildet werden, entweder unter einander parallel ſeyn, oder in einer Ebne liegen. Erſteres iſt aber nicht möglich, weil jede dieſer Achſen-Ebnen durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Daher liegen alle in einer Ebne, welche, durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, einen Hauptkreis bildet, in welchem die Pole aller jener Kreiſe liegen.

Zuſatz. Sind a und b (Figur 7.) die Durchſchnittspunkte, α, β, γ die Pole oder Mittelpunkte der ſich ſchnei-

benden Kreiſe; ſo ſind $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$ die ſphäriſchen Radien derſelben.

Sind zwei dieſer Radien Quadranten, etwa $a\alpha$, $a\beta$, ſo ſind a und b die Pole des Hauptkreiſes $\alpha\beta\gamma$ (§. 8. Zuſ. 4.); alſo auch alle übrige Radien Quadranten. Wenn alſo zwei oder mehrere Hauptkreiſe ſich in denſelben zwei Punkten ſchneiden, ſo ſind dieſe Durchſchnittspunkte die Pole desjenigen Hauptkreiſes, in welchem die Pole jener Kreiſe liegen.

§. 10.

Erklärung. Den Winkel oder die Neigung der Ebnen zweier Kreiſe wollen wir ſchlechthin den Winkel der Kreiſe nennen, und beziehen dieſen Ausdruck ſelbſt auf Theile der Kreiſe, auf Bogen [illegible] verſtehen alſo unter dem Winkel oder der Neigung zweier Kreisbogen den Winkel der zugehörigen Kreisebnen. Die Bogen eines ſolchen Winkels heißen dann ſeine Schenkel.

Zuſatz. Was alſo von den Neigungswinkeln der Ebnen gilt, gilt auch von den Winkeln der Kreiſe und Bogen, z. B. daß die Summe zweier Nebenwinkel gleich zwei Rechten iſt; daß Scheitelwinkel gleich ſind; daß in einem Punkte eines Kreiſes nur ein Perpendikel möglich iſt u. ſ. w.

Anmerk. Wenn von dem Winkel zweier Ebnen geredet wird, ſo darf man nicht außer Acht laſſen, daß zwei Ebnen immer vier Winkel bilden. Unterſcheidet man die beiden Seiten, welche jeder Ebne zukommen, als poſitive und negative, und bezeichnet ſie für eine Ebne durch A und $\bar{A}$, für eine zweite Ebne durch B, $\bar{B}$; ſo laſſen ſich die vier Winkel beider Ebnen durch AB, A$\bar{B}$, $\bar{A}$B, $\overline{AB}$ darſtellen, wo AB $=$ $\overline{AB}$; A$\bar{B}$ $=$ $\bar{A}$B, alſo die zwiſchen entgegengeſetzten Seiten der Ebnen enthaltenen Winkel einander gleich ſind. Welche Seite jeder Ebne als die poſitive zu nehmen ſey, iſt im Allgemeinen willkührlich; durch beſondre Umſtände kann dieß jedoch entſchieden werden. Da durch einen der vier Winkel zweier Ebnen alle beſtimmt ſind, ſo kann man bei Betrachtung zweier Ebnen an einen Winkel ſich halten, und die-

jenigen Seiten der Ebnen, zwiſchen denen der gemeinte Winkel liegt, als poſitive nehmen. Umgekehrt, ſind irgend wie zwei Seiten der Ebnen als poſitive bezeichnet, ſo kann man den zwiſchen ihnen befindlichen Winkel als den Winkel der Ebnen anſehen, wenn ſchlechthin von einem Winkel geſprochen wird.

Dieſe Bemerkung iſt nicht gleichgültig, wie wir ſogleich und weiterhin ſehen werden.

§. 11.

Aufgabe. Den Winkel zweier Kreiſe zu beſtimmen.

Auflöſung. Wir wollen zwei Fälle unterſcheiden:

1) wenn die gegebenen Kreiſe ſich ſchneiden;

2) wenn ſie ſich nicht ſchneiden.

1) Es ſeyen acb, a'cb' (Figur 8.) zwei Kreiſe, welche ſich in c und c' ſchneiden, deren Ebnen alſo die geradlinige Sehne cc' gemein haben. Diejenigen Seiten der beiden Kreisebnen, welche dem Mittelpunkte der Kugel zugekehrt ſind, mögen als poſitive, alſo der eben dahin gerichtete Winkel der Ebnen als der zu beſtimmende genommen werden.

Legt man durch die Mittelpunkte der beiden Kreiſe einen Hauptkreis, deſſen Ebne durch die Achſe derſelben geht (§. 9.) und auf den Ebnen beider ſenkrecht ſteht, ſo ſchneidet ſie dieſe Kreisebnen in den gradlinigen Durchmeſſern ab, a'b', die zugleich Sehnen des Hauptkreiſes ſind. Wenn nun die drei Durchſchnittslinien dreier Ebnen nicht parallel ſind, ſo treffen ſie in einem Punkte zuſammen. Es müſſen alſo die drei Durchſchnitte ab, a'b', cc' ſich in einem Punkte, d, dem Durchſchnittspunkte der Sehnen ab und a'b', ſchneiden.

Da nun die Ebne des Hauptkreiſes ab'ba' auf den beiden Kreisebnen acb, a'cb' ſenkrecht ſteht, ſo ſteht deren Durchſchnitt cc' auf dem Hauptkreiſe ſenkrecht; daher ad, a'd auf cc' rechtwinklig, und der Winkel ada' iſt der geſuchte Neigungswinkel der beiden Kreisebnen.

Um dieſen näher zu beſtimmen, erinnere man ſich, daß

der Winkel zweier ſich ſchneidenden Sehnen gleich der halben Summe der zwiſchen ſeinen Schenkeln und zwiſchen den Schenkeln ſeines Scheitelwinkels enthaltenen Bogen, alſo der Winkel $ada' = \frac{\text{Bogen } b'b + \text{Bogen } a\alpha\beta a'}{2}$ iſt, von denen b'b von beiden Kreiſen eingeſchloſſen, aαβa' aber ausgeſchloſſen iſt. Wir können alſo das gefundene Reſultat ſo ausſprechen:

Der Neigungswinkel zweier ſich ſchneidenden Kreiſe iſt gleich der halben Summe der von beiden eingeſchloſſenen und ausgeſchloſſenen Bogen des Hauptkreiſes, der durch ihre Mittelpunkte geht. Oder bezeichnet man die Bogen bb', aαβa' nach den Seiten der Kreisebnen, zwiſchen denen ſie liegen, ſo liegt aαβa' zwiſchen den poſitiven, bb' zwiſchen den negativen Seiten derſelben, alſo jeder zwiſchen gleichartigen Seiten, während die andern beiden Bogen b'a, ba' zwiſchen ungleichartigen Seiten liegen. Daher läßt ſich der eben ausgeſprochene Satz ſo ſtellen:

Der Neigungswinkel zweier ſich ſchneidenden Kreiſe iſt gleich der halben Summe der zwiſchen den gleichartigen Seiten ihrer Ebnen enthaltenen Bogen des durch ihre Mittelpunkte gehenden Hauptkreiſes.

2) Der Fall, wenn die Kreiſe ſich nicht ſchneiden, läßt ſich aus dem Abgehandelten leicht ableiten. Läßt man nämlich den Mittelpunkt des Kreiſes a'cb' ſich in dem Hauptkreiſe aba' herabbewegen, während der andre Kreis bleibt, ſo nimmt der eingeſchloſſene Bogen bb' ab; wird bei der bloßen Berührung der Kreiſe Null und geht dann über in einen ausgeſchloſſenen Bogen, der für einen negativen eingeſchloſſenen zu nehmen iſt. Die Summe $\frac{a\alpha\beta a' + b'b}{2}$ verwandelt ſich alſo in die Differenz $\frac{a\alpha\beta a' - b'b.}{2}$ Unmittelbar läßt ſich dies durch den Satz erweiſen: Der Winkel zweier Sekanten eines Kreiſes iſt gleich der halben Differenz der

von ihnen abgeſchnittenen Bogen des Kreiſes. Sind nämlich (Figur 9.) aeb, a'e'b' zwei ſich nicht ſchneidende Kreiſe, ſo liegt der Durchſchnitt cc' ihrer Ebnen außerhalb der Kugel, und aus den oben angeführten Gründen müſſen auch hier die Durchſchnitte ab, a'b' und cc' ſich in einem Punkte d treffen, und der Winkel ada' der Sekanten ad, a'd, der Neigungswinkel der Kreiſe ſeyn. Deſſen Maaß iſt nun die halbe Differenz der Bogen $a\alpha\beta a'$ und bb'.

Bezeichnen wir auch hier die Bogen $a\alpha\beta a'$ und bb' nach den Seiten der Kreisebnen, ſo liegen beide zwiſchen den poſitiven Seiten derſelben, während zwiſchen den negativen Seiten gar kein Theil der Kugel liegt.

Es iſt alſo der Winkel zweier ſich nicht ſchneidenden Kreiſe auf der Kugelfläche gleich der halben Differenz der zwiſchen den gleichartigen Seiten ihrer Ebnen liegenden Bogen des Hauptkreiſes, der durch ihre Mittelpunkte geht.

Anmerk. Beide Sätze ſind Analogieen der erwähnten planimetriſchen Sätze.

Zuſatz 1. Da bei der Berührung der Kreiſe der Bogen bb' verſchwindet, ſo iſt ihr Neigungswinkel dann $= \frac{a\alpha\beta a'}{2}$. In Worten: Der Winkel zweier ſich berührenden Kreiſe auf der Kugelfläche iſt der Hälfte des zwiſchen den poſitiven Seiten ihrer Ebnen enthaltenen Bogens desjenigen Hauptkreiſes gleich, welcher durch die Mittelpunkte der Kreiſe geht.

Zuſatz 2. Setzen wir in obigen Formeln, und zwar in der des erſten Falles für $a\alpha\beta a'$ den gleichen Werth $2\pi - 2r - 2r' + bb'$, wo r, r' die ſphäriſchen Radien der Kreiſe, π die Hälfte eines Hauptkreiſes bedeutet, ſo iſt

$$ada' = \pi - r - r' + bb';$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + bb';$$

Im zweiten Falle iſt $a\alpha\beta a' = 2\pi - 2r - 2r' - bb'$; daher

$$ada' = \pi - r - r' - bb'$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) - bb'.$$

Der Winkel zweier ſich ſchneidenden Kreiſe iſt alſo der Summe aus den Komplementen ihrer Radien und dem von beiden eingeſchloſſenen Bogen des durch ihre Mittelpunkte gehenden Hauptkreiſes gleich. Bei ſich nicht ſchneidenden Kreiſen tritt die Differenz zwiſchen der Komplementenſumme und bb' ein. Bei ſich berührenden Kreiſen endlich wird $ada' = \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$, alſo der Summe aus den Komplementen der Radien gleich.

In allen drei Fällen läßt ſich ſtatt der Komplementenſumme $\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$ das Supplement der Radienſumme $\pi - (r + r')$ ſetzen.

Zuſatz 3. Wird im zweiten Falle $b'b = a\alpha\beta a'$, ſo iſt $ada' = 0$; die Kreiſe ſind alſo parallel und in Zuſ. 2. iſt dann $\pi = r + r' + bb'$; die Pole der beiden Kreiſe alſo Gegenpunkte, gemäß §. 7. Zuſ. 1.

Zuſatz 4. Iſt einer von den beiden Kreiſen ein Hauptkreis, etwa der, deſſen Radius mit r' bezeichnet war, ſo iſt $r' = \frac{\pi}{2}$; und es wird dann

1) wenn die Kreiſe ſich ſchneiden: $ada' = \frac{\pi}{2} - r + bb'$
$= \text{Komplem. } r + bb' = \text{Komplem. } (r - bb')$;
2) wenn die Kreiſe ſich nicht treffen: $ada' = \frac{\pi}{2} - r - bb'$
$= \text{Komplem. } r - bb' = \text{Komplem. } (r + bb')$;
3) wenn die Kreiſe ſich berühren: $ada' = \frac{\pi}{2} - r$
$= \text{Komplem. } r$.

Zuſatz 5. Geht der Hauptkreis durch den Mittelpunkt des andern Kreiſes, ſo iſt $bb' = r$, und $ada' = \frac{\pi}{2}$.

Der (ſphäriſche) Radius ſteht alſo auf ſeinem Kreiſe ſenkrecht. —

Iſt auch der zweite Kreis ein Hauptkreis, ſo iſt ſein Radius ein Quadrant.

Demnach ſtehen alle vom Pole eines Hauptkreiſes auf denſelben gezogenen Quadranten ſenkrecht auf demſelben.

Und daher ſteht jeder Hauptkreis, der durch die Pole eines andern geht, auf demſelben ſenkrecht.

Zuſatz 6. Sind beide ſich ſchneidende Kreiſe Hauptkreiſe, ſo iſt $r=\frac{\pi}{2}$; $r'=\frac{\pi}{2}$; alſo ihr Neigungswinkel $=bb' = a\alpha\beta a'$. In Worten:

Der Winkel zweier Hauptkreiſe iſt gleich demjenigen Bogen des durch ihre Pole gehenden Hauptkreiſes, welcher zwiſchen den poſitiven, d. i. zwiſchen den den Winkel einſchließenden Seiten ihrer Ebnen enthalten iſt.

Sind alſo (Figur 10.) ABC, DEC Hauptkreiſe und FBE der durch ihre Pole gehende, ſo iſt Winkel $ACD=BE$. Da die Durchſchnitte zweier Hauptkreiſe zugleich die Pole des durch ihre Pole gehenden Hauptkreiſes, alſo BC und CE Quadranten ſind; ſo wird der den Winkel ACD meſſende Bogen BE gefunden, wenn man jeden Schenkel gleich einem Quadranten nimmt und ihre Endpunkte durch einen Hauptbogen verbindet.

Zuſatz 7. Der Nebenwinkel adb' von ada' iſt

im erſten Falle $=\frac{\text{Bogen } ab' + \text{Bogen } a'b}{2} = r + r' - bb'$;

im zweiten Falle .... $= r + r' + bb'$;

im Berührungsfalle .... $= r + r'$;

wie dies auch aus $adb' = \pi - ada'$ folgt.

§. 12.

Aufgabe. Die Entfernung der Pole zweier Kreiſe auf der Kugelfläche zu beſtimmen.

Auflöſung. Es ſeyen acb, a'cb' (Figur 8.) zwei

Kreiſe; die Pole des erſten d'', δ; die des zweiten d', δ'. Da jeder Kreis zwei Pole hat, ſo ſind vier Polabſtände vorhanden, $d''d'$, $d''\delta'$, $\delta\delta'$, $\delta d'$, unter denen $d''d'=\delta\delta'$, als Gegenbogen, und $d'd''+d'\delta=\delta'\delta+\delta'd''=\pi$, durch einen, alſo jeder der übrigen beſtimmt iſt. Es findet alſo auch hier, wenn man ſchlechthin von der Polentfernung zweier Kreiſe ſpricht, dieſelbe Unbeſtimmtheit ſtatt, wie oben bei den Winkeln der Kreiſe. Wenn wir indeß auch die Pole in poſitive und negative unterſcheiden, und zwar den auf der poſitiven Seite der Kreisebne liegenden als den poſitiven, und die Entfernung der poſitiven Pole als die abſolute Polentfernung nehmen; ſo erhält die Aufgabe völlige Beſtimmtheit.

Dies vorausgeſetzt, ſeyen δ, δ' die poſitiven Pole der Kreiſe. Ihr Abſtand $\delta\delta'=d''d'$ iſt $=d''b+bd'=d''b+b'd'-bb'=r+r'-bb'$; für ſich nicht treffende Kreiſe iſt $d''d'=r+r'+bb'$; für Kreiſe, die ſich berühren, $d''d'=r+r'$. Dieſelben Werthe fanden wir oben (§. 11. Zuſ. 7.) für den Nebenwinkel des von den Kreiſen gebildeten Neigungswinkels.

Alſo iſt die Entfernung der Pole zweier Kreiſe dem Supplement ihres Winkels gleich.

Zuſatz. Bezeichnen wir alſo die Seiten einer Kreisebne mit A, $\overline{A}$; die einer zweiten mit B, $\overline{B}$; die Pole der Kreiſe mit α, $\overline{\alpha}$; β, $\overline{\beta}$; ſo iſt $AB+\alpha\beta=A\overline{B}+\alpha\overline{\beta}=\overline{A}B+\overline{\alpha}\beta=\overline{A}\overline{B}+\overline{\alpha}\overline{\beta}=\pi$.

§. 13.

Aufgabe. Es iſt ein Kreis gegeben; man ſoll einen zweiten Kreis beſchreiben, der mit dem erſten einen gegebenen Winkel macht.

Auflöſung. Es ſey acb (Figur 8.) der gegebene Kreis und der gegebene Winkel $=w$. Von dem Mittelpunkte d'' des Kreiſes acb aus nehme man in beliebiger Richtung in einer Entfernung $=\pi-w$ einen zweiten Punkt d' und be-

ſchreibe um d′ einen Kreis a′cb′ von beliebigem Radius, welcher der Aufgabe genügen wird.

Beweis. Da die Polentfernung beider Kreiſe $=d''d' = \pi - w$ und der Winkel der Kreiſe dem Supplement jener gleich iſt, ſo iſt derſelbe $= w$.

Zuſatz 1. Beſchreibt man um d als Mittelpunkt einen Kreis, deſſen Radius $= dd'$, ſo kann jeder Punkt in der Peripherie deſſelben für d′ genommen werden; außerhalb derſelben aber kann d′ nicht liegen. Daraus folgt:

Die Mittelpunkte aller der Kreiſe, welche mit einem gegebenen Kreiſe einerlei Winkel w machen, bilden wieder einen Kreis, deſſen Mittelpunkt der des gegebenen und deſſen Radius das Supplement von w iſt.

Zuſatz 2. Iſt der gegebene Kreis der Hauptkreis ABC (Figur 11.), ſo liegen die (poſitiven und negativen) Pole aller Kreiſe, die mit ABC einen Winkel $=$ PD machen, in den gleichen Parallelkreiſen DEF, D′E′F′, welche um P, P′, die Pole von ABC, mit dem Radius $=$ PD $=$ P′D′ beſchrieben werden.

Denn jeder hat zugleich als Radius PD′ $=$ P′D, die Supplemente von PD.

Von den ſphäriſchen Dreiecken und Polygonen.

§. 14.

Erklärung. Ein **ſphäriſches Dreieck** iſt ein von drei Bogen dreier verſchiedenen Hauptkreiſe eingeſchloſſener Theil der Kugelfläche. Wird von mehr als drei Bogen eben ſo vieler verſchiedenen Hauptkreiſe ein Theil der Kugelfläche begränzt, ſo iſt er ein **ſphäriſches Polygon**, deſſen, ſo wie des ſphäriſchen Dreieckes **Seiten** jene einſchließenden Bo-

gen ſind. Die Prädikate gleichſeitig, gleichwinklig, ungleichſeitig, regelmäßig u. ſ. w. kommen dieſen Figuren in demſelben Sinne zu, wie den gleichnamigen ebnen.

Zuſatz 1. In einem ſphäriſchen Dreiecke kann keine Seite ein Halbkreis ſeyn. Denn iſt unter den Bogen (Figur 12.) AC, CB, AB der letzte ein Halbkreis, ſo ſind A und B Gegenpunkte; der durch A und C gelegte Hauptkreis geht alſo auch durch B und es ſind AC, CB nicht Bogen verſchiedener Kreiſe, ſondern ACB ebenfalls ein Halbkreis, der mit dem andern die Spindel ACDB bildet.

So kann auch kein Winkel des Dreieckes zwei rechten Winkeln gleich ſeyn.

Obwohl ſphäriſche Dreiecke möglich ſind mit einer Seite und einem Winkel, die das Maaß eines Halbkreiſes überſteigen; ſo läßt ſich die Betrachtung derſelben doch auf ſolche zurückführen, in denen jede Seite, ſo wie jeder Winkel kleiner als ein Halbkreis iſt, auf welche wir uns daher allein beſchränken. — Daſſelbe gilt von allen ſphäriſchen Polygonen.

Zuſatz 2. Die Spitzen eines ſphäriſchen Dreieckes oder Polygones können nicht alle mit dem Mittelpunkt der Kugel in einer Ebne liegen, weil ſonſt ſämmtliche Seiten in einem Hauptkreiſe liegen, die ganze Figur alſo nur ein Kreis ſeyn würde.

Daher ſchneidet jede durch die Ecken eines ſphäriſchen Dreieckes, oder, wenn es möglich iſt, eines ſphäriſchen Polygones gelegte Ebne die Kugelfläche in einem Nebenkreiſe.

Anmerk. Da die Ebnen der Kreiſe, deren Bogen ein ſphäriſches Dreieck oder Polygon bilden, im Mittelpunkte der Kugel zuſammentreffen, ſo bilden ſie einen körperlichen Winkel von eben ſo viel Seiten als die Figur auf der Kugelfläche hat, deſſen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, deſſen Seitenwinkel durch die Seiten des ſphäriſchen Polygones gemeſſen werden und deſſen Neigungswinkel dieſelben des ſphäriſchen Polygones ſind.

§. 15.

Erklärung. Das ſphäriſche Polygon, welches durch die Pole der Seiten eines ſphäriſchen Polygones gebildet wird, heißt das Polarpolygon deſſelben.

Unter den Polen ſind hier diejenigen gemeint, welche auf den dem innern Raume des Polygones zugekehrten Seiten der Bogen liegen, welche das Polygon bilden. Nennen wir dieſe innern Seiten der Bogen die poſitiven, ſo ſind die Pole die poſitiven, wie oben §. 12.

Lehrſatz. Die Polarität der ſphäriſchen Polygone iſt gegenſeitig, d. h. iſt ein Polygon P das Polarpolygon eines andern P', ſo iſt auch P' das Polarpolygon von P.

Beweis. Es ſey abcde.... (Figur 13.) ein ſphäriſches Polygon (P) und die (poſitiven) Pole von ab, bc, cd,..... ſeyen bezüglich α, β, γ,.... Verbindet man dieſe durch Bogen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$...., zu einem Polygone (P'), ſo iſt (nach §. 9. Zuſ.) b der Pol von $\alpha\beta$; c von $\beta\gamma$; d von $\gamma\delta$ u. ſ. w., alſo die Winkelpunkte von P auch die Pole von P'.

§. 16.

Lehrſatz. Zwiſchen den Polarpolygonen findet die Beziehung ſtatt, daß die Seiten des einen die Supplemente der Winkel des andern ſind.

Beweis. Da die Entfernung zweier Pole das Supplement des Winkels iſt, welchen ihre Kreiſe bilden (§. 12.), ſo ſind (Figur 13.) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$..... bezüglich die Supplemente der Winkel b, c, d.... Und da die Punkte b, c, d,... die Pole von $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$... ſind, ſo ſind aus demſelben Grunde bc, cd, de.... die Supplemente der Winkel β, γ, δ,....; alſo die Seiten jedes Polygones die Supplemente der Winkel des andern.

Anmerk. 1. Unter den Polygonen ſind hier die Dreiecke mit begriffen.

Anmerk. 2. Je größer die Zahl der Seiten eines ſphäriſchen Polygones wird, deſto mehr nähert es ſich einer ſphäriſchen Kurve.

Daher muß es auch Polarkurven geben, d. h. ſolche Kurven, deren Punkte die Elemente einer andern Kurve ſind, welche Elemente als Theile eines Hauptbogens (des Berührungskreiſes) betrachtet werden.

Daß auch hier die Polarität gegenſeitig iſt und daß jede zwei Polarkurven von einerlei Form ſind, wird im dritten Theile gezeigt werden.

§. 17.

Bezeichnen wir die Ecken eines ſphäriſchen Dreiecks mit α, β, γ; deren Gegenpunkte mit $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$; ſo ſchneiden ſich die Hauptkreiſe, deren Bogen die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ ſind, auch in $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ und geben ſomit ſechs Durchſchnittspunkte, von denen je zwei Gegenpunkte ſind. Da unter den Ecken eines ſphäriſchen Dreiecks keine Gegenpunkte vorkommen dürfen (§. 14. Zuſ. 1.), ſo können obige drei Syſteme von Punkten, nämlich $(\alpha, \overline{\alpha})$; $(\beta, \overline{\beta})$; $(\gamma, \overline{\gamma})$; nur ſo zu Dreiecken verbunden werden, daß aus jedem nur ein Punkt zu zwei der übrigen genommen wird.

Daher finden ſich die möglichen Kombinationen jener ſechs Punkte zu Dreiecken durch Entwickelung des Produktes $(\alpha+\overline{\alpha})\,(\beta+\overline{\beta})\,(\gamma+\overline{\gamma})$, nämlich $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\overline{\gamma}$; $\alpha\overline{\beta}\gamma$, $\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}$; $\overline{\alpha}\beta\gamma$, $\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}$; $\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma$, $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$.

Es ſind alſo mit einem Dreiecke ſtets ſieben andre verbunden, die wir näher betrachten wollen. Zu dem Ende ſey (Figur 14.) $\alpha\beta\gamma$ ein ſphäriſches Dreieck, deſſen Hauptkreiſe ſich in den Gegenpunkten $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ zum zweitenmale ſchneiden. Verwechſeln wir γ mit $\overline{\gamma}$, ſo haben wir das Dreieck $\alpha\beta\overline{\gamma}$, welches die Seite $\alpha\beta$ mit $\alpha\beta\gamma$ gemein hat; die andern

Seiten $\alpha\bar{\gamma}$, $\beta\bar{\gamma}$ aber ſind die Supplemente von $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. Die Vergleichung der Winkel beider Dreiecke ergiebt: $\alpha\gamma\beta = \alpha\bar{\gamma}\beta$; $\gamma\alpha\beta =$ Supplement von $\bar{\gamma}\alpha\beta$; $\gamma\beta\alpha =$ Supplement von $\bar{\gamma}\beta\alpha$.

Bezeichnen wir alſo die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit a, b, c, und zwar die einer Ecke gegenüberliegende Seite mit dem entſprechenden Buchſtaben, ($\gamma\beta$ mit a, $\gamma\alpha$ mit b u. ſ. w.); ferner die Winkel mit A, B, C und zwar jeden Winkel mit dem ſeinem Scheitelpunkte entſprechenden Buchſtaben ($\gamma\alpha\beta$ mit A u. ſ. w.); ſo läßt ſich das Dreieck darſtellen durch die Form

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \mathrm{a\,b\,c} \\ \mathrm{ABC} \end{matrix}\right\}.$$

Deuten wir noch die Supplemente der Seiten und Winkel durch horizontale Striche über deren Buchſtaben an, z. B. das Supplement von a durch $\bar{\mathrm{a}}$, das von A durch $\bar{\mathrm{A}}$; ſo wird das Dreieck $\alpha\beta\bar{\gamma}$ dargeſtellt durch

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \\ \bar{\mathrm{a}}\,\bar{\mathrm{b}}\,\mathrm{c} \\ \bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\mathrm{C} \end{matrix}\right\}.$$

Es gehen alſo bei Verwechſelung einer Ecke des Dreieckes mit ihrem Gegenpunkte die nicht unter derſelben ſtehenden Seiten und Winkel in ihre Supplemente über. Daher haben wir an dem Dreiecke $\left\{\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \mathrm{a\,b\,c} \\ \mathrm{ABC} \end{matrix}\right\}$ die anliegenden Dreiecke: $\left\{\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\bar{\gamma} \\ \bar{\mathrm{a}}\,\bar{\mathrm{b}}\,\mathrm{c} \\ \bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\mathrm{C} \end{matrix}\right\}$; $\left\{\begin{matrix} \alpha\,\bar{\beta}\,\gamma \\ \bar{\mathrm{a}}\,\mathrm{b}\,\bar{\mathrm{c}} \\ \bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}\bar{\mathrm{C}} \end{matrix}\right\}$; $\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}\,\beta\,\gamma \\ \mathrm{a}\,\bar{\mathrm{b}}\,\bar{\mathrm{c}} \\ \mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{C}} \end{matrix}\right\}$.

Nach demſelben Verwandlungsgeſetze wird man aus $\alpha\beta\bar{\gamma}$ durch Vertauſchung von β mit $\bar{\beta}$ das Dreieck $\left\{\begin{matrix} \alpha\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma} \\ \mathrm{a}\,\bar{\mathrm{b}}\,\bar{\mathrm{c}} \\ \mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{C}} \end{matrix}\right\}$

herleiten, welches dieſelben Seiten und Winkel wie $(\overline{\alpha}\beta\gamma)$ hat. Wie ſonach $(\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}) = \overline{\alpha}\beta\gamma$; ſo iſt auch $(\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}) = (\alpha\overline{\beta}\gamma)$; und $(\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma) = (\alpha\beta\overline{\gamma})$; endlich noch $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma} = \alpha\beta\gamma$.

Unter den acht Dreiecken, welche durch drei Hauptkreiſe gebildet werden, ſind alſo je zwei einander nach ihren Seiten und Winkeln gleich; nämlich

$$\alpha\beta\gamma = \overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma};$$
$$\alpha\beta\overline{\gamma} = \overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma;$$
$$\alpha\overline{\beta}\gamma = \overline{\alpha}\beta\overline{\gamma};$$
$$\overline{\alpha}\beta\gamma = \alpha\overline{\beta}\overline{\gamma};$$

bemerken wir dabei noch, daß in jedem Paare gleicher Dreiecke die Ecken des einen die Gegenpunkte der Ecken im andern, folglich auch die Seiten des einen die **Gegenbogen** der Seiten im andern ſind; ſo können wir ſolche füglich **Gegendreiecke** nennen.

Jedes ſphäriſche Dreieck iſt alſo ſeinem Gegendreieck nach Seiten und Winkeln gleich.

Da mit jedem ſphäriſchen Dreiecke auch ſein Polardreieck gegeben iſt, ſo ſind mit **einem** Dreiecke ſtets acht **verſchiedene** Dreiecke gegeben. Bezeichnen wir nämlich die Pole der Seiten eines Dreiecks mit α', β', γ'; deren Gegenpunkte mit $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\gamma'}$; ſo ſind dieſe acht Dreiecke folgende:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ \mathrm{abc}\\ \mathrm{ABC}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\overline{\gamma}\\ \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}\mathrm{c}\\ \overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha\overline{\beta}\gamma\\ \overline{\mathrm{a}}\mathrm{b}\overline{\mathrm{c}}\\ \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\overline{\alpha}\beta\gamma\\ \mathrm{a}\overline{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{c}}\\ \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\end{matrix}\right\};$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\\ \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{c}}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\overline{\gamma'}\\ \mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}\\ \mathrm{ab}\overline{\mathrm{c}}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha'\overline{\beta'}\gamma'\\ \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}\\ \mathrm{a}\overline{\mathrm{b}}\mathrm{c}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\overline{\alpha'}\beta'\gamma'\\ \overline{\mathrm{A}}\mathrm{BC}\\ \overline{\mathrm{a}}\mathrm{bc}\end{matrix}\right\};$$

wo die unter einander ſtehenden Dreiecke Polardreiecke ſind.

§. 18.

Auch jedes ſphäriſche Polygon hat ſein Ge-

genpolygon, das mit ihm einerlei Seiten und Winkel hat.

Denn ſind α, β, γ, δ,...... die Ecken eines ſphäriſchen Polygones, in der angegebenen Reihe auf einanderfolgend, und $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$,.... deren Gegenpunkte; ſo iſt das ſphäriſche Dreieck $\overline{\alpha\beta\gamma}$ das Gegendreieck von $\alpha\beta\gamma$; daher Winkel $\bar{\beta}=\beta$; eben ſo ſind $\overline{\beta\gamma\delta}$ und $\beta\gamma\delta$ Gegendreiecke, mithin Winkel $\bar{\gamma}=\gamma$ u. ſ. w. Die Seiten aber $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\delta\varepsilon}$..... ſind den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$,... als Gegenbogen gleich. —

Anmerk. Die Radien vom Mittelpunkte der Kugel nach den Ecken zweier ſphäriſchen Gegenpolygone bilden zwei körperliche Winkel, die wie Doppelkegel mit ihren Spitzen einander gegenüberliegen. Da je zwei zu Gegenpunkten gehörige Radien einen Kugeldurchmeſſer und je zwei Durchmeſſer nur eine Ebne bilden; ſo werden jene körperlichen Winkel durch gemeinſchaftliche Ebnen gebildet, und ſowohl ihre Seitenwinkel, als ihre Neigungswinkel ſind gegenſeitig Scheitelwinkel. Man könnte daher ſolche körperliche Doppelwinkel mit Recht körperliche Scheitelwinkel nennen, die einander gleich ſind, wie die ebnen Scheitelwinkel.

§. 19.

Denkt man ſich (Figur 14.) das ſphäriſche Dreieck $\overline{\alpha\beta\gamma}$ über ſein Nebendreieck $\overline{\alpha\beta\gamma}$ hinweg auf ſein Gegendreieck $\alpha\beta\gamma$ geſchoben, ſo fällt $\bar{\gamma}$ auf β; $\bar{\beta}$ auf γ. Sollte auch $\bar{\alpha}$ auf α fallen, ſo würde $\alpha\beta=\bar{\alpha}\bar{\gamma}=\alpha\gamma$, alſo $\alpha\beta\gamma$ ein gleichſchenkliches Dreieck ſeyn. Da wir indeß bei allgemeiner Betrachtung die Dreiecke als ungleichſeitige vorausſetzen müſſen, ſo wird im Allgemeinen $\bar{\alpha}$ nicht auf α fallen, die Deckung der Gegendreiecke alſo unmöglich ſeyn; denn an ein umgekehrtes Aufeinanderlegen, wie bei ebnen Dreiecken, iſt hier nicht zu denken, weil die konvexen Oberflächen der ſphäriſchen Dreiecke ſich nicht decken.

Dieſer Umſtand, daß ſphäriſche Dreiecke, wenn gleich aus einerlei Seiten und Winkeln zuſammengeſetzt, dennoch keine Deckung zulaſſen können, erzeugt in der Lehre von der Gleichheit derſelben eine Schwierigkeit, die bei ebnen Dreiecken nicht ſtattfindet, die wir indeß umgehen können, wenn wir noch erwägen, daß ein ſphäriſches Dreieck aus dreien ſeiner Beſtandtheile (Seiten, Winkel) überhaupt nur auf zweierlei Art zuſammengeſetzt ſeyn kann. Denn ſind die Seiten eines Dreiecks a, b, c; die Winkel A, B, C und nehmen wir z. B. eine Seite mit den anliegenden Winkeln, a, B, C; ſo können B und C nur zwei Lagen haben, entweder B—a—C, oder C—a—B; ein dritter Fall iſt unmöglich. Oder nehmen wir zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, a, b, C; ſo können die Seiten a und b nur auf zweierlei Art auf den Schenkeln des Winkels C liegen, entweder in der Ordnung a—C—b, oder b—C—a.

Daſſelbe läßt ſich von jeder Terne aus den Elementen a, b, c, A, B, C erweiſen.

Da alſo drei Stücke eines Dreiecks nur auf zweierlei Art zuſammengeſetzt ſeyn können; in Gegendreiecken aber jede drei Stücke immer auf verſchiedene Weiſe zuſammengeſetzt ſind, ſo folgt hieraus:

Sind drei Stücke eines ſphäriſchen Dreieckes T gleich dreien Stücken eines andern Dreieckes T', ſo iſt die Art ihrer Zuſammenſetzung in T' entweder wie die in T, oder wie die in dem Gegendreiecke $\overline{T}$ des letztern.

Daher läßt ſich die Gleichheit nach Seiten und Winkeln zweier ſphäriſchen Dreiecke T, T' entweder aus der unmittelbaren Kongruenz von T' mit T, oder aus der mittelbaren von T' mit $\overline{T}$ herleiten. —

Auch bei Gegenpolygonen findet die Unmöglichkeit ihrer Deckung ſtatt. Denn ſchiebt man ein Polygon $\overline{P}$, deſſen Ecken $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \ldots \overline{\varphi}, \overline{\psi}$ ſind, auf ſein Gegenpolygon P, deſſen Ecken $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi, \psi$ ſind, ſo daß $\overline{\alpha}$ auf α fällt,

ſo werden $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, ... ſich von $\overline{\alpha}$ nach der entgegengeſetzten Seite reihen, wie β, γ, δ, ... an α, auf folgende Weiſe:

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\overline{\gamma\beta\alpha}$$

Aber auch hier iſt klar, daß ein Polygon nur auf zweierlei Art aus ſeinen Seiten und Winkeln, die in gegebener Ordnung ſich an einander reihen, zuſammengeſetzt ſeyn kann. Denn z. B. an die Ecke β ſchließen ſich die Ecken α und γ, entweder in der Ordnung $\alpha\beta\gamma$, oder $\gamma\beta\alpha$. Mithin läßt ſich auch die Gleichheit der ſphäriſchen Polygone entweder auf unmittelbare Kongruenz, oder auf mittelbare durch das Gegenpolygon gründen.

Anmerk. Sphäriſche Dreiecke und Polygone, welche aus einerlei Seiten und Winkeln beſtehen, und in denen immer gleiche Stücke ſich an einander fügen, aber nach entgegengeſetzten Richtungen, heißen ſymmetriſche Dreiecke oder Polygone.

Aus dem Obigen iſt klar, daß ſymmetriſche Polygone oder Dreiecke nichts anders, als Gegenpolygone oder Gegendreiecke ſind.

§. 20.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel gleich ſind, ſo ſind die Dreiecke einander gleich nach Seiten und Winkeln.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 15.) ABC und A'B'C' ſeyen die Seiten AB, AC den Seiten A'B', A'C', der Winkel A dem Winkel A' gleich, und dieſe drei Stücke in beiden Dreiecken auf einerlei Art konſtruirt. Man lege A'B' auf AB, ſo fällt, weil A'=A, auch AC auf A'C', C' auf C, und die Dreiecke decken ſich.

Sind aber die angeführten Stücke in den Dreiecken auf entgegengeſetzte Art zuſammengeſetzt, wie in A'B'C' und $\alpha\beta\gamma$, dem Gegendreieck von ABC, ſo iſt A'B'C' auch dem $\alpha\beta\gamma$

nach Seiten und Winkeln gleich, weil es ſich mit ABC deckt.

Zuſatz 1. In gleichen Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

Zuſatz 2. In jedem ſphäriſchen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Denn iſt in ABC Seite AB=AC, ſo iſt auch im Gegendreieck $\alpha\beta\gamma$ Seite $\alpha\beta=\alpha\gamma$; überdem iſt Winkel $C=\gamma$; $B=\beta$. Als gleichſchenkliche Dreiecke decken ſich aber ABC und $\alpha\beta\gamma$, und zwar C mit β; B mit γ; aus $C=\gamma$ und $B=\gamma$ folgt nun C=B.

Zuſatz 3. Sind alle Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks gleich, ſo ſind alle Winkel gleich.

§. 21.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken die Seiten des einen den Seiten des andern bezüglich gleich ſind, ſo ſind es auch die Winkel.

Beweis. In den Dreiecken ABC, A'B'C' ſey AB=A'B'; AC=A'C'; BC=B'C' und dieſe Seiten ſeyen auf entgegengeſetzte Art konſtruirt. Man denke ſich A'B'C' unter ABC ſo an daſſelbe gelegt, daß A'B' auf AB fällt; ſo iſt in dem gleichſchenklichen Dreiecke CBC' Winkel BCC'=BC'C; in dem ebenfalls gleichſchenklichen Dreieck CAC' iſt Winkel ACC'=AC'C; daher BCC'+ACC'=BC'C+AC'C d. i. Winkel ACB=A'C'B'; folglich die Dreiecke ABC und A'B'C' gleich nach dem vorigen Lehrſatze.

Sind aber die Seiten in beiden Dreiecken auf einerlei Art konſtruirt, ſo nehme man für das eine ſein Gegendreieck.

§. 22.

Lehrſatz. Wenn eine Seite und die anliegenden Winkel in zwei ſphäriſchen Dreiecken

Digitized by Google

gleich ſind, ſo ſind die Dreiecke nach Seiten und Winkeln einander gleich.

Beweis. Es ſey in den Dreiecken $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ a'\,b'\,c'\\ A'B'C'\end{matrix}\right\}$ Seite $c=c'$, Winkel $A=A'$; $B=B'$. In ihren Polardreiecken $\left\{\begin{matrix}a\,b\,c\\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\\ \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}a'\,b'\,c'\\ \overline{A}'\overline{B}'\overline{C}'\\ \overline{a}'\,\overline{b}'\,\overline{c}'\end{matrix}\right\}$ iſt dann $\overline{A}=\overline{A}'$; $\overline{B}=\overline{B}'$ und $\overline{c}=\overline{c}'$, alſo zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel gleich, daher auch $\overline{a}=\overline{a}'$; $\overline{b}=\overline{b}'$; $\overline{C}=\overline{C}'$; woraus $a=a'$; $b=b'$; $C=C'$ folgt.

Zuſatz 1. Hat ein ſphäriſches Dreieck zwei gleiche Winkel, ſo ſind auch die denſelben gegenüberſtehenden Seiten einander gleich. Denn aus $A=B$ im Dreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$ folgt $\overline{A}=\overline{B}$ im Polardreieck $\left\{\begin{matrix}a\,b\,c\\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\\ \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\end{matrix}\right\}$ daher $\overline{a}=\overline{b}$ (§. 20. Zuſ. 2.); woraus ſich $a=b$ ergiebt.

Zuſatz 2. Ein gleichwinkliches ſphäriſches Dreieck iſt auch ein gleichſeitiges.

§. 23.

Lehrſatz. Sind die Winkel zweier ſphäriſchen Dreiecke bezüglich gleich, ſo ſind es auch die Seiten derſelben.

Beweis. Wenn in den Dreiecken $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ a'\,b'\,c'\\ A'B'C'\end{matrix}\right\}$ $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ iſt; ſo iſt in den Polardreiecken $\left\{\begin{matrix}a\,b\,c\\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}\\ \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}a'\,b'\,c'\\ \bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'\\ \bar{a}'\,\bar{b}'\,\bar{c}'\end{matrix}\right\}$ derſelben $\bar{A} = \bar{A}'$; $\bar{B} = \bar{B}'$; $\bar{C} = \bar{C}'$; alſo die Polardreiecke ihren Seiten, mithin auch ihren Winkeln nach gleich. (§. 21.) Aus $\bar{a} = \bar{a}'$, $\bar{b} = \bar{b}'$, $\bar{c} = \bar{c}'$ folgt dann $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

§. 24.

Lehrſatz. Die Summe der Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes iſt kleiner als ein Hauptkreis.

Beweis. Man lege durch die Ecken des Dreieckes ABC (Figur 17.) eine Ebne, welche die Kugelfläche in dem Nebenkreiſe AbCaBc ſchneidet. (§. 14. Zuſ. 2.) Da unter den Kreisbogen zwiſchen zwei Punkten der Kugelfläche der Bogen des Hauptkreiſes der kürzeſte iſt (§. 6. Zuſ. 1.), ſo iſt Seite AC < AbC; AC < BaC; AB < AcB; daher die Summe aller Seiten kleiner als der Umfang des Nebenkreiſes, um ſo mehr alſo kleiner als der Hauptkreis.

Zuſatz 1. Wie im Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$ $a + b + c < 2\pi$ iſt, ſo iſt auch im Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\beta\gamma\\ a\,\bar{b}\,\bar{c}\\ A\bar{B}\bar{C}\end{matrix}\right\}$ $a + \bar{b} + \bar{c} < 2\pi$. Addirt man hier auf beiden Seiten $b + c$, ſo iſt $a + 2\pi < 2\pi + b + c$; daher $a < b + c$. In Worten: Die Sum-

Digitized by Google

me zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes iſt größer, als die dritte Seite.

Zuſatz 2. Aus $b+c>a$ folgt $b>a-c$, d. h. jede Seite des ſphäriſchen Dreieckes iſt größer als die Differenz der beiden andern.

Zuſatz 3. Auf das Polardreieck $\left\{\begin{matrix} a\,b\,c \\ \overline{ABC} \\ \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \end{matrix}\right\}$ angewendet, giebt der Lehrſatz $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}<2\pi$, d. i. $\pi-A+\pi-B+\pi-C<2\pi$, woraus $\pi<A+B+C$ folgt. Die Summe der Winkel eines ſphäriſchen Dreiecks iſt alſo ſtets größer als zwei Rechte.

Da jeder Winkel $<\pi$, ſo iſt $A+B+C<3\pi$; alſo π und 3π die Grenzen der Winkelſumme.

Die Grenzen der Seitenſumme iſt 0 und 2π; der Abſtand beider Grenzen alſo gleich.

Zuſatz 4. Wie im Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ nach Zuſ. 2. $A+B+C>\pi$ iſt, ſo iſt im Nebendreiecke $\overline{\alpha}\beta\gamma$ auch $A+\overline{B}+\overline{C}>\pi$, d. i. $A+\pi-B+\pi-C>\pi$, woraus $A+\pi>B+C$ folgt. Die Summe zweier Winkel übertrifft den dritten um weniger als zwei Rechte.

Zuſatz 5. Aus $\pi<A+B+C$ folgt $\pi-A<B+C$, d. i. $\overline{A}<B+C$; und aus $\pi>A+B-C$ (Zuſ. 4.) folgt $\pi-A>B-C$, oder $\overline{A}>B-C$.

In Worten: Der Außenwinkel ($\overline{A}$) eines ſphäriſchen Dreiecks (d. h. der Nebenwinkel eines Winkels im Dreieck) iſt kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der beiden innern Winkel (B, C) des Dreieckes, welche ihm gegenüber liegen.

Zuſatz 6. Die Summe zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks iſt auch größer als die Summe zweier Bogen, welche von einem Punkte innerhalb des Dreiecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen werden. Denn ſind

im Dreieck ABC (Figur 18.) DA, DB ſolche Bogen, ſo verlängere man AD bis an BC, die es in E trifft. Im Dreieck AEC iſt dann $AC+CE>AD+DE$ (Zuſ. 1.); im Dreieck BED iſt $DE+EB>DB$; daher, wenn beide Ungleichungen addirt und DE auf beiden Seiten ſubtrahirt wird $AC+CB+>AD+DB$.

Was den Winkel x betrifft, ſo iſt er $<C+y+z$, aber $>C-(y+z)$. Denn es iſt $x<u+y$; und $x>u-y$; (Zuſ. 5.) eben ſo $u<C+z$ und $u>C-z$, daher $x<C+y+z$ und $x>C-(y+z)$.

§. 25.

Lehrſatz. In jedem ſphäriſchen Dreieck ſteht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis. Es ſey im Dreieck ABC der Winkel $B>A$. Macht man durch den Bogen DB den Winkel $DBA=A$, ſo iſt $AD=DB$. (§. 22. Zuſ. 1.). In dem Dreieck BCD iſt $DB+DC>CB$, daher $AD+DC$, d. i. $AC>CD$.

Zuſatz 1. Auch ſteht der größern Seite der größere Winkel gegenüber. Denn iſt $AC>CB$, ſo kann nicht $A=B$ ſeyn, wegen (§. 22. Zuſ. 1.); auch kann nicht $A>B$ ſeyn, wegen des eben bewieſenen Lehrſatzes. Daher muß $A<B$ ſeyn.

Anmerk. Das Polardreieck würde daſſelbe Reſultat auf directem Wege geben.

Zuſatz 2. Je nachdem die Summe zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreiecks größer, oder kleiner, oder eben ſo groß iſt, als ein Halbkreis, iſt auch die Summe der gegenüber liegenden Winkel größer, kleiner, oder eben ſo groß als zwei Rechte.

Denn iſt im Dreieck $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \text{a b c}\\ \text{ABC}\end{Bmatrix}$ $a+b \lesseqqgtr \pi$, ſo iſt $a \lesseqqgtr \pi - b$, oder $a \lesseqqgtr \overline{b}$; alſo im Nebendreieck $\begin{Bmatrix}\overline{\alpha}\beta\gamma\\ \text{a}\overline{\text{b}}\overline{\text{c}}\\ \text{A}\overline{\text{B}}\overline{\text{C}}\end{Bmatrix}$ auch $A \lesseqqgtr \overline{B}$ (§. 25. Zuſ. 1. und §. 20. Zuſ. 2.), oder $A \lesseqqgtr \pi - B$; daher $A + B \lesseqqgtr \pi$.

Zuſatz 3. Umgekehrt: Je nachdem die Summe zweier Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes größer, eben ſo groß, oder kleiner als zwei Rechte iſt, iſt auch die Summe der gegenüberſtehenden Seiten größer, eben ſo groß, oder kleiner als ein halber Hauptkreis.

§. 26.

Die ſo eben entwickelten merkwürdigen Eigenſchaften des ſphäriſchen Dreieckes führen auf andre nicht minder wichtige Folgerungen, zu deren Entwickelung wir Folgendes vorausſchicken:

I. Lehnſatz. 1) Wenn die Summe zweier Bogen (oder Winkel) kleiner als π iſt, ſo iſt der kleinere $<\frac{\pi}{2}$;

2) iſt die Summe $>\pi$, ſo muß der größere $>\frac{\pi}{2}$ ſeyn;

3) zweideutig iſt im erſten Falle der größere, im zweiten Falle der kleinere;

4) in beiden Fällen aber iſt der zweideutige

Bogen dem Quadranten näher, als der andere.

Beweis. Die Richtigkeit von 1), 2), 3) fällt in die Augen.

Was 4) betrifft, ſo ſey

a) für den erſten Fall der größere Bogen $=AB$ (Figur 20.) und $A'B'=AB$ gemacht. Der kleinere Bogen muß alſo $<AB$, folglich entfernter vom Quadranten AC ſeyn. Iſt der größere Bogen $>\frac{\pi}{2}$, etwa $=AB'$, ſo muß der Vorausſetzung in 1) wegen der kleinere $<A'B'$, alſo ebenfalls entfernter vom Quadranten ſeyn.

b) Für den zweiten Fall ſey der kleinere Bogen AB oder AB'; der andere muß nicht nur $>\frac{\pi}{2}$, ſondern auch größer, als AB', alſo ebenfalls entfernter vom Quadranten ſeyn.

II. Eine ähnliche Betrachtung giebt die Richtigkeit der Umkehrung: Wenn von zwei Bogen φ, ψ der eine, φ, dem Quadranten näher iſt, als der andere, ψ; ſo muß

1) wenn $\varphi+\psi<\pi$ iſt, ψ der kleinere und $<\frac{\pi}{2}$ ſeyn;

2) wenn $\varphi+\psi>\pi$ iſt, ψ der größere und größer als ein Quadrant ſeyn.

Denn es ſey $\varphi=AB$ oder AB' und

1) $\varphi+\psi<\pi$. Wäre nun $\psi>\frac{\pi}{2}$, ſo müßte ψ auch $>AB'$, alſo $\varphi+\psi>\pi$ ſeyn, gegen die Vorausſetzung. Wäre $\psi=\frac{\pi}{2}$, ſo wäre φ nicht dem Quadranten näher. Alſo kann ψ nur $<\frac{\pi}{2}$, und muß demnach auch $<\varphi$ ſeyn.

2) Es ſey $\varphi+\psi>\pi$. Wäre $\psi<\frac{\pi}{2}$, ſo müßte er $<AB$; alſo $\varphi+\psi<\pi$ ſeyn, was mit der Vorausſetzung ſtreitet; eben ſo wenig kann $\psi=\pi$ ſeyn. Daher muß $\psi<\frac{\pi}{2}$, und der größere Bogen ſeyn.

§. 27.

Dieſe Sätze auf die Seiten und Winkel des ſphäriſchen Dreieckes angewendet, ergeben Folgendes:

1) Wenn zwei Seiten a, b eines ſphäriſchen Dreieckes ſo beſchaffen ſind, daß $a+b<\pi$, und $a<b$ iſt; ſo iſt a kleiner als der Quadrant. Zugleich iſt aber auch $A+B<\pi$ und $A<B$, daher auch $A<\frac{\pi}{2}$; alſo ſind a und A **gleichartig**.

2) Wenn $a+b>\pi$ und $a>b$ iſt, ſo iſt $a>\frac{\pi}{2}$; dann iſt auch $A+B>\pi$ und $A>B$, daher auch $A>\frac{\pi}{2}$; alſo a und A gleichartig.

Da in beiden Fällen b und B dem Quadranten näher ſind, als a und A (§. 26.), ſo folgt wegen 26. II. hieraus der Satz:

Wenn von zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes die eine ihrer Größe nach vom Quadranten entfernter iſt, als die andere, ſo iſt ſie mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig.

Wenden wir dies auf alle drei Seiten des Dreieckes an, und nehmen c als die dem Quadranten nächſte Seite, ſo folgt aus der Vergleichung 1) von c mit a, 2) von c mit b, daß a und b mit ihren gegenüberliegenden Winkeln gleichartig ſind.

Alſo ſind in jedem ſphäriſchen Dreiecke wenigſtens zwei Seiten gleichartig mit den gegenüberliegenden Winkeln, und zwar diejenigen, welche von dem Quadranten entfernter als die dritte Seite ſind.

Der Reziprozität der Sätze in §. 25. Zuſ. 2. und Zuſ. 3. wegen laſſen ſich in obigen Schlüſſen die Seiten mit den Winkeln verwechſeln, und es ergeben ſich die Umkehrungen:

Von zwei Winkeln eines ſphäriſchen Dreieckes iſt der von dem Rechten entferntere mit der gegenüberliegenden Seite gleichartig; und:

In jedem ſphäriſchen Dreiecke ſind wenigſtens zwei Winkel und zwar diejenigen, welche vom Rechten entfernter ſind als der dritte Winkel, mit ihren gegenüberliegenden Seiten gleichartig.

Anmerk. Daß die dritte Seite mit dem dritten Winkel im Allgemeinen ſowohl gleichartig als ungleichartig ſeyn kann, zeigt eine einfache Betrachtung. Man kann nämlich den Schenkeln AC, AB, eines Winkels CAB, deren Summe nicht größer als ein Quadrant iſt, jede beliebige Oeffnung, ſtumpfwinkliche und ſpitzwinkliche, geben, während die Endpunkte B, C der Schenkel um weniger als die Summe der beiden Schenkel, alſo um weniger als einen Quadranten von einander entfernt ſind. (§. 24 Zuſ. 1.)

Nimmt man ſtatt der Summe die Differenz der beiden Schenkel AB, AC nicht kleiner als $\frac{\pi}{2}$, ſo bleibt BC immer größer als $\frac{\pi}{2}$ (§. 24. Zuſ. 2.), während jene Schenkel ſpitze und ſtumpfe Winkel bilden können.

Zuſatz 1. Aus der Reziprozität der entwickelten Sätze folgt, daß der dem Quadranten näheren Seite auch der dem Rechten nähere Winkel gegenüberſtehe; und umgekehrt. Hier-

aus aber folgt: ſind zwei Seiten gleich weit vom Quadranten entfernt, ſo ſind es auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel; und umgekehrt.

Zuſatz 2. Iſt unter den Winkeln des ſphäriſchen Dreieckes einer ein rechter, oder unter den Seiten eine gleich dem Quadranten, ſo ſind dieſe dem rechten Winkel oder Quadranten am nächſten; daher müſſen im rechtwinklichen Dreieck, ſo wie in demjenigen, das einen Quadranten als Seite hat (Quadrantendreieck), die übrigen Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig ſeyn.

Zuſatz 3. Iſt in einem ſphäriſchen Dreiecke eine Seite ein Quadrant und ein anliegender Winkel ein rechter, ſo ſind auch die dieſen gegenüberliegenden Stücke ein rechter Winkel und ein Quadrant. Denn es ſey $a=\frac{\pi}{2}$ und $B=\frac{\pi}{2}$. Wegen $a=\frac{\pi}{2}$ iſt b gleichartig mit B (Zuſ. 2.), alſo $b=\frac{\pi}{2}$; wegen $B=\frac{\pi}{2}$ iſt A gleichartig mit a, alſo $A=\frac{\pi}{2}$; folglich ſowohl b als $A=\frac{\pi}{2}$. —

Daher ſind alle drei Seiten Quadranten und alle Winkel rechte, wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel Quadranten und Rechte ſind.

Zuſatz 4. Sind zwei Seiten dem Quadranten gleich nahe und zugleich näher als die dritte, ſo ſind alle Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig.

Denn ſind b und c dem Quadranten gleich nahe, ſo iſt entweder $b=c$, oder $b+c=\pi$. Je nachdem nun $b \lesseqgtr c$, iſt auch $B \lesseqgtr C$, und je nachdem $b+c \lesseqgtr \pi$, iſt auch B+

$C \lesseqgtr \pi$. Alſo müſſen b, c mit B, C gleichartig ſeyn; a iſt nach der Hypotheſis mit A gleichartig, alſo alle Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig.

Hieraus folgt: Wenn zwei Seiten Quadranten ſind, ſo ſind die gegenüberliegenden Winkel rechte; daher alle Winkel rechte ſeyn müſſen, wenn alle Seiten Quadranten ſind. — Die Umkehrung hiervon bedarf keiner Auseinanderſetzung.

Zuſatz 5. Iſt eine Seite ein Quadrant und der gegenüberliegende Winkel ein rechter, ſo iſt wenigſtens noch eine Seite ein Quadrant. Denn es ſey (Figur 21.) im Dreieck ABC Seite CB ein Quadrant, A ein rechter Winkel und AC ſey kein Quadrant. Dann ſey $AD = \frac{\pi}{2}$, wo D der Pol von AB iſt. (§. 8. Zuſ. 4.) Zieht man den Quadranten DB, ſo iſt Winkel CDB ein rechter (Zuſ. 4.) und daher AB ein Quadrant. (Zuſ. 3.)

§. 28.

Lehrſatz. Sind alle Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes ſpitze, ſo ſind alle Seiten kleiner als Quadranten.

Beweis. Es ſeyen im Dreieck ABC (Figur 22.) alle Winkel ſpitze und B der größte. Da er zugleich der dem Rechten nächſte iſt, ſo ſind die Seiten AB, BC den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig, folglich kleiner als Quadranten; alſo iſt nur zu beweiſen, daß $AC < \frac{\pi}{2}$ ſey.

Wäre $AC > \frac{\pi}{2}$, ſo ſey $AC' = \frac{\pi}{2}$; zugleich auch $AB' = \frac{\pi}{2}$. Dann ſind AB'C' und AC'B' rechte Winkel (§. 27. Zuſ. 4.) und B'C' mit A gleichartig (Zuſ. 2.), alſo B'C'

$<\frac{\pi}{2}$. In dem an B' rechtwinklichen Dreiecke BB'C' iſt B'BC' gleichartig mit B'C', alſo auch $B'BC' < \frac{\pi}{2}$; daher $ABC' > \frac{\pi}{2}$ und um ſo mehr $ABC > \frac{\pi}{2}$; gegen die Vorausſetzung. Alſo kann AC nicht $> \frac{\pi}{2}$ ſeyn.

Wäre $AC = \frac{\pi}{2}$, ſo folgt aus dem an B' rechtwinklichen Dreiecke BB'C eben ſo wie vorhin, daß B'BC gleichartig mit BC, alſo $< \frac{\pi}{2}$, und alſo $ABC > \frac{\pi}{2}$ ſeyn müßte, was ebenfalls gegen die Vorausſetzung iſt. Mithin iſt auch $AC < \frac{\pi}{2}$.

Zuſatz 1. Iſt der größte Winkel ein rechter, ſo ſind auch alle Seiten kleiner als Quadranten; denn die obigen Schlüſſe ändern ſich dabei nicht.

Zuſatz 2. Sind alle Seiten größer als Quadranten, ſo ſind alle Winkel ſtumpf. Denn iſt jede der Seiten a, b, $c > \frac{\pi}{2}$; ſo ſind $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} < \frac{\pi}{2}$; alſo im Polardreieck alle Winkel ſpitz, daher alle Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ zu Folge des Lehrſatzes $< \frac{\pi}{2}$; mithin A, B, $C > \frac{\pi}{2}$.

Zuſatz 3. Iſt die kleinſte Seite ein Quadrant, ſo ſind auch alle Winkel ſtumpf. Dies folgt eben ſo mit Hülfe des Polardreieckes aus Zuſ. 1.

Dieſer Zuſätze wegen läßt ſich der Satz allgemeiner ſo aufſtellen: Iſt in einem ſphäriſchen Dreiecke der größte Winkel nicht größer als ein Rechter, ſo ſind alle Seiten kleiner als Quadranten; iſt die kleinſte Seite nicht kleiner als ein Quadrant, ſo ſind alle Winkel ſtumpf.

Zuſatz 4. Iſt in einem rechtwinklichen ſphäriſchen Dreiecke jede Kathete $<\frac{\pi}{2}$, ſo iſt auch die Hypotenuſe $<\frac{\pi}{2}$. Denn dann iſt der rechte Winkel der größte. (§. 27. Zuſ. 2.)

Zuſatz 5. Iſt jede Kathete $>\frac{\pi}{2}$, ſo iſt ebenfalls die Hypotenuſe $<\frac{\pi}{2}$; denn iſt im Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$ A ein Rechter und b, $c>\frac{\pi}{2}$, ſo iſt in $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ $\bar{b}$, $\bar{c}<\frac{\pi}{2}$, A ein Rechter, daher nach Zuſ. 4. $a<\frac{\pi}{2}$.

Beide Zuſätze laſſen ſich ſo zuſammenfaſſen: Sind die Katheten gleichartig, ſo iſt die Hypotenuſe $<\frac{\pi}{2}$.

Zuſatz 6. Sind die Katheten ungleichartig, ſo iſt die Hypotenuſe $>\frac{\pi}{2}$. Denn iſt in $(\alpha\beta\gamma)$ die Kathete $b>\frac{\pi}{2}$; $c<\frac{\pi}{2}$; ſo ſind in $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$ die Katheten b und $\bar{c}$ gleichartig; daher $\bar{a}<\frac{\pi}{2}$; folglich $a>\frac{\pi}{2}$.

Zuſatz 7. Die Richtigkeit der Umkehrungen der Zuſätze 5. und 6. fällt in die Augen.

Zuſatz 8. Dieſelben Zuſätze auf das Polardreieck angewendet, ergeben: Sind in einem Quadrantendreiecke die Nichtquadranten gleichartig, ſo iſt der dem Quadranten gegenüberliegende Winkel ſtumpf; ſind jene ungleichartig, ſo iſt er ſpitz; und umgekehrt.

§. 29.

Die in §. 27. und §. 28. dargeſtellten Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln des ſphäriſchen Dreiecks füh-

ren auf einen fünften und ſechſten Satz von der Gleichheit ſphäriſcher Dreiecke.

Lehrſatz. Zwei ſphäriſche Dreiecke ſind einander gleich, wenn zwei Seiten und der Winkel, welcher der dem Quadranten näheren Seite von jenen beiden entgegenſteht, gleich ſind.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 23.) ABC, A'B'C' ſey AC=A'C'; CB=C'B'; B=B' und AC, A'C', dem Quadranten näher, als CB, C'B'.

Man lege C'B' auf CB; ſo fällt A'B' auf AB, weil B'=B. Der Punkt A' kann weder zwiſchen A und B, noch über A hinausfallen. Denn fiele A' etwa in A'', ſo würde CAA'' ein gleichſchenkliches Dreieck, der Winkel CAA''= CA''A, alſo Winkel CA''B ungleichartig mit CAB ſeyn. — Mit beiden aber müßte Seite CB gleichartig ſeyn, weil in den Dreiecken CAB, CA''B, Seite CB vom Quadranten entfernter, als CA'', CA iſt. Alſo kann A'' nicht zwiſchen A und B fallen. — Fiele A' über A hinaus, etwa in A'''; ſo würde wieder aus der Gleichheit von CA und CA''' die Ungleichartigkeit der Winkel CA'''B, CAB folgen, mit welchen beiden CB gleichartig ſeyn müßte. Daher muß A' auf A fallen und die Dreiecke ſich decken.

Anmerk. 1. Sind die Dreiecke auf entgegengeſetzte Art konſtruirt, ſo iſt für das eine ſein Gegendreieck zu nehmen.

Anmerk. 2. Daß die Winkel CA''A, CA'''A, und CAA'' Rechte ſeyn, und ſomit obige Schlüſſe ſtören könnten, iſt deswegen nicht möglich, weil dann C der Pol von AB (§. 7. Zuſ. 2.), daher CB als Quadrant nicht entfernter vom Quadranten ſeyn würde, als AB.

Zuſatz 1. Der Lehrſatz iſt auch gültig, wenn die in demſelben erwähnten Seiten (AC, BC) gleich weit vom Quadranten abſtehen. Denn daß auch in dieſem Falle A' nicht zwiſchen A und B, etwa in A'', liegen kann, ſteht ſo: Da AC und BC gleich entfernt vom Quadranten ſind, ſo iſt

entweder AC=BC, oder AC+BC=π; eben ſo entweder A'C'=B'C', oder A'C'+B'C'=π. Iſt AC, A'C'=BC, B'C', ſo iſt Winkel CAB=CBA=CA"B; und wegen AC=A"C auch CAB=CA"A; daher müßte CA"B=CA"A, alſo alle genannten Winkel Rechte, C der Pol von AB und die Seiten CB, CA Quadranten ſeyn, was nicht angenommen und auch nicht anzunehmen iſt. Iſt aber AC+BC=π=A'C'+B'C'; und A' fiele in A", ſo würde Winkel CAB+CBA=π=CA"B+CBA, mithin CA"B=CAB und wegen CAA"=CA"A auch CA"B=CA"C alſo, wie vorhin, C der Pol von AB ſeyn. Eben ſo läßt ſich darthun, daß A' nicht über A hinausfallen kann, wie A'". Daher iſt die Behauptung evident.

Zuſatz 2. Zwei rechtwinkliche ſphäriſche Dreiecke ſind gleich, wenn die Hypotenuſe und eine Kathete in beiden gleich ſind. (§. 27. Zuſ. 1.)

Zwei Quadrantendreiecke ſind gleich, wenn ein Nichtquadrant und der dem Quadranten gegenüberliegende Winkel gleich ſind.

§. 30.

Lehrſatz. Zwei ſphäriſche Dreiecke ſind gleich, wenn zwei Winkel und die Seite, welche dem, dem Rechten näheren von jenen Winkeln gegenüberliegt, gleich ſind.

Beweis. Iſt in den Dreiecken ($\alpha\beta\gamma$), ($\alpha'\beta'\gamma'$), A=A'; B=B'; b=b'; und B, B' dem Rechten näher als A, A'; ſo iſt in den Polardreiecken (abc), (a'b'c') Seite $\overline{A}=\overline{A}'$; $\overline{B}=\overline{B}'$; Winkel $\overline{b}=\overline{b}'$ und $\overline{B}$, $\overline{B}'$ dem Quadranten näher, als $\overline{A}$, $\overline{A}'$, daher nach dem Vorigen dieſe Dreiecke, mithin auch ihre Polardreiecke ($\alpha\beta\gamma$), ($\alpha'\beta'\gamma'$) gleich.

Zuſatz 1. Der Lehrſatz iſt auch gültig, wenn die erwähnten Winkel gleich weit vom Rechten entfernt ſind. (§. 29. Zuſ. 1.)

Zuſatz 2. Zwei rechtwinkliche Dreiecke ſind gleich, wenn die Hypotenuſen nebſt einem anliegenden Winkel in beiden gleich ſind.

Zwei Quadrantendreiecke ſind gleich, wenn zwei Winkel, darunter der dem Quadranten gegenüberſtehende, gleich ſind.

§. 31.

Lehrſatz. Wenn zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes zweien Seiten eines andern gleich, der eingeſchloſſene Winkel des erſten aber größer, als in dem andern iſt; ſo iſt die dritte Seite des erſtern größer, als die des zweiten.

Beweis. Es ſey (Figur 24.) $A'C' = AC$; $C'B' = CB$; der Winkel $C' < C$. Man lege $A'C'$ auf AC, ſo fällt $C'B'$ zwiſchen CA und CB und der Punkt B entweder über, unter oder auf AB.

1) Fällt B' über AB, wie B''; ſo iſt $CB + BA > CB'' + B''A$, folglich nach Abzug der Gleichung $CB = CB''$ auch $AB > AB''$.
2) Fällt B' unter AB, etwa in B'''; ſo ziehe man BB'''. In dem gleichſchenklichen Dreiecke $CB'''B$ iſt Winkel $CB'''B = CBB'''$; daher $CB'''B > ABB'''$ und noch mehr $AB'''B > ABB'''$; daher $AB > AB'''$.
3) Fällt B' auf AB, wie b; ſo iſt klar, daß $AB > Ab$ iſt.

§. 32.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken zwei Winkel gleich, die eingeſchloſſene Seite aber ungleich iſt; ſo ſteht der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Iſt $A = A'$; $B = B'$; $c > c'$; ſo iſt in den

Polardreiecken $\overline{A}=\overline{A'}$; $\overline{B}=\overline{B'}$; $\overline{c}<\overline{c'}$; daher nach dem vorigen Satze $\overline{C}<\overline{C'}$; woraus $C>C'$ folgt.

Zuſatz. Iſt in zwei rechtwinklichen Dreiecken einer der ſchiefen Winkel gleich, die anliegenden Katheten aber ungleich, ſo ſteht der größern Kathete ein größerer Winkel gegenüber.

§. 33.

Lehrſatz. Wenn zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes zweien Seiten eines andern gleich, die dritte Seite des erſten aber größer, als die des zweiten iſt; ſo iſt der der größern Seite gegenüberliegende Winkel größer als der der kleinern Seite im andern Dreiecke gegenüberliegende.

Beweis. Iſt $a=a'$; $b=b'$; $c>c'$; ſo kann nicht $C<C'$ ſeyn, wegen §. 31.; auch kann nicht $C=C'$ ſeyn, wegen §. 20. Alſo muß $C>C'$ ſeyn.

§. 34.

Lehrſatz. Wenn zwei Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes gleich zweien Winkeln eines andern, die dritten Winkel in beiden Dreiecken aber ungleich ſind, ſo ſteht dem größern dieſer Winkel eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es ſey $A=A'$; $B=B'$; $C>C'$; ſo kann weder $c<c'$, wegen §. 32., noch $c=c'$ ſeyn, wegen §. 22. Alſo muß $c>c'$ ſeyn.

Zuſatz. Iſt ein ſchiefer Winkel eines rechtwinklichen Dreieckes einem ſchiefen Winkel eines andern gleich, die an-

dern beiden ſchiefen Winkel aber ungleich; ſo ſteht dem größern eine größere Kathete entgegen.

§. 35.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken zwei Seiten gleich ſind, der Winkel aber, welcher der größeren und zugleich dem Quadranten näheren Seite gegenüberſteht, in dem einen Dreieck größer als im andern iſt; ſo iſt die dritte Seite im erſten Dreiecke kleiner, als im andern.

Beweis. Es ſey (Figur 25.) $AC = A'C'$; $AB = A'B'$; AB, $A'B'$ größer und dem Quadranten näher als AC, $A'C'$; endlich $C' > C$.

Man lege $A'C'$ auf AC, ſo fällt $C'B'$ unter CB. Verlängert man AB bis ſie $C'B'$ in D ſchneidet, ſo muß B' zwiſchen D und C liegen. Denn läge B' jenſeit D, etwa in B'', ſo ziehe man AB'', und $B''B$, welcher verlängert zwiſchen A und C die Seite AC trifft. Da $AC < AB''$, und vom Quadranten entfernter iſt, ſo iſt $AC < \frac{\pi}{2}$ (§. 26.) und gleichartig mit Winkel $AB''C$, welcher alſo ſpitz iſt. Daher iſt auch $AB''B$ ein ſpitzer und weil $AB'' = A'B' = AB$, ſo iſt auch ABB'' ein ſpitzer; mithin ABE ein ſtumpfer; um ſo mehr ABC ein ſtumpfer. Mit ABC muß aber AC gleichartig ſeyn; alſo müßte AC mit den ungleichartigen Winkeln $AB''C$, ABC zugleich gleichartig ſeyn; was ungereimt iſt. Daher kann B nicht jenſeit D fallen. Eben ſo wenig auch auf D ſelbſt, weil dann $AD = A'B' = AB$ wäre, was nicht ſeyn kann. Fällt nun B zwiſchen C und D, ſo ziehe man BB'. Wegen $AB = AB'$ iſt Winkel $ABB' = AB'B$; daher $CBB' < AB'B$, und vielmehr $CBB' < CB'B$; daher iſt $CB > CB'$ d. i. $B'C' < BC$.

§. 36.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken zwei Winkel gleich, die Seite aber, welche dem kleineren und zugleich dem Rechten näheren Winkel gegenüberſteht, in dem einen Dreiecke größer iſt, als in dem andern; ſo iſt der dritte Winkel im erſten Dreiecke kleiner als im zweiten.

Beweis. Es ſey $A=A'$; $B=B'$; B, B' kleiner und näher an $\frac{\pi}{2}$ als A, A'; $b>b'$; ſo iſt in den Polardreiecken Seite $\overline{A}=\overline{A'}$; $\overline{B}=\overline{B'}$; $\overline{B}$, $\overline{B'}$ größer und dem Quadranten näher als $\overline{A}$, $\overline{A'}$; $b<b'$; daher (§. 35.) $\overline{C}>\overline{C'}$, folglich $C<C'$.

§. 37.

Lehrſatz. Wenn in zwei ſphäriſchen Dreiecken eine Seite und ein anliegender Winkel gleich ſind; der andere anliegende Winkel aber in einem Dreiecke größer, als in dem andern iſt, ſo liegt dem größeren dieſer Winkel eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es ſey (Figur 26.) $A'B'=AB$; $B'=B$; aber $A'<A$. Legt man $A'B'$ auf AB, ſo fällt $B'C'$ auf BC und $A'C'$ zwiſchen AC und AB; daher auch C' zwiſchen B und C. Alſo iſt $B'C'<BC$.

Zuſatz 1. Umgekehrt: Wenn $A'B'=AB$; $B'=B$ und $B'C'<BC$, ſo iſt $A'<A$.

Zuſatz 2. Iſt B, B' zugleich der größte und dem Rechten nächſte Winkel, ſo iſt auch $A'C'<AC$.

Denn wäre $AC'=AC$, ſo würden die Dreiecke ABC', ABC gleich (§. 29.) und $A=A'$ ſeyn, gegen die Vorausſetzung. Wäre $AC'>AC$, ſo ſey $AC''=AC$ und BC'' ge-

zogen. Dann würde nach §. 35. $C'B > CB$; alſo $AC'' + C'B > AC + CB$ ſeyn, was nicht möglich iſt. (§. 24. Zuſ. 6.) Daher muß $AC' < AC$ ſeyn.

Iſt alſo in zwei ſphäriſchen Dreiecken der größte und zugleich dem Rechten nächſte nebſt einer anliegenden Seite gleich; die andre anliegende Seite aber in dem einen Dreiecke größer, als in dem andern; ſo iſt auch die dritte Seite des erſten Dreieckes größer, als die des andern.

Zuſatz 3. Kommt zu obigen Bedingungen noch die, daß B, B' nicht größer als ein Rechter ſey; ſo iſt $C' > C$.

Denn in dieſem Falle iſt AC, A'C' kleiner, als ein Quadrant (§. 28. Zuſ. 3.); daher $AC + AC' < \pi$; mithin auch $C + AC'C < \pi$; aber $AC'C + AC'B = \pi$; daher AC'B d. i. $C' > C$.

§. 38.

Lehrſatz. Unter allen Bogen, welche von einem gegebenen Punkte der Kugelfläche nach einem gegebenen Hauptkreiſe gezogen werden, iſt der ſenkrechte, wenn er kleiner als ein Quadrant iſt, der kleinſte; wenn er größer als ein Quadrant iſt, der größte.

Beweis. Es ſey (Figur 27.) A der gegebene Punkt; EBE'B' der gegebene Kreis; und AB ſey ſenkrecht auf EBE'B' und AC ganz beliebig von A bis EBE'B' gezogen.

Iſt nun 1) AB kleiner, als ein Quadrant, ſo iſt in dem an B rechtwinklichen Dreiecke ABC der Winkel C ein ſpitzer (§. 27. Zuſ. 2.); alſo $C < B$; mithin $AB < AC$.

Iſt aber 2) AB größer als ein Quadrant, ſo iſt Winkel C ein ſtumpfer, alſo $C > B$; folglich $AB > AC$. Da AC jeder beliebige Bogen von A nach EBE'B' ſeyn kann; ſo iſt der Satz evident.

Zuſatz 1. Es ſey P der Pol von EBE'B', E der

Pol von PABP'B'. Zieht man mehrere Bogen AC, AD, AF, AG, ſo ſind dieſe deſto kleiner, je näher ſie an dem kleinſten AB; deſto größer, je näher ſie an dem größten AB', dem Supplement des kleinſten AB, liegen. Denn da der Winkel ACB wie auch ADB, ein ſpitzer iſt (§. 27. Zuſ. 2.); ſo iſt ACD ein ſtumpfer Winkel, alſo $ACD > ADC$; mithin $AD > AC$. Eben ſo iſt $AG > AF$; weil Winkel AGB wegen Gleichartigkeit mit der Kathete AB ein ſpitzer, AFG oder AFB' aber, als gleichartig mit AB', ein ſtumpfer iſt. —

Da AE ein Quadrant iſt, ſo ſind die Bogen zwiſchen AB und AE kleiner als Quadranten; die zwiſchen AB' und AE aber größer.

Zuſatz 2. Die ſpitzen Winkel ACB, ADB u. ſ. w. nehmen ab; AEB (=AB) iſt ihr Minimum; jenſeit des Minimums nehmen ſie wieder zu, je mehr ſie ſich (der Lage nach) von demſelben entfernen. Denn es iſt z. B. 1) $ACB > ADB$, weil $AC < \frac{\pi}{2}$; $AD < \frac{\pi}{2}$, alſo $AC + AD < \pi$; mithin auch $ACD + ADC < ACD + ACB$ iſt; woraus $ADC < ACB$ folgt. 2) Es iſt $AFB < AGB$, weil (wegen $AF > \frac{\pi}{2}$, $AG > \frac{\pi}{2}$) $AF + AG > \pi$, daher $AFG + AGF > \pi$; dagegen $AFG + AFB = \pi$ iſt; woraus AGF, d. i. $AGB > AFB$ folgt.

Die ſtumpfen Nebenwinkel jener ſpitzen dagegen nehmen von B und B' nach E hin zu, wo ihr Maximum AEB' (=AB') iſt.

Zuſatz 3. Zu beiden Seiten des Perpendikels AB in gleichen Abſtänden von demſelben finden ſich gleiche Bogen und Winkel. Denn iſt $BC' = BC$, ſo ſind die Dreiecke ABC, ABC' gleich; daher $AC' = AC$, und die Winkel an C' denen an C gleich. Alſo auch auf der andern Seite des Perpendikels AB wachſen die ſchiefen Bogen, je mehr ſie ſich von dem Minimum AB entfernen, und die Winkel neh-

men nach demſelben Geſetze, wie auf der andern Seite, nach E', dem Gegenpunkte von E, hin, ab und zu.

Zuſatz 4. Von einem Punkte, der nicht Pol eines Hauptkreiſes iſt, kann auf denſelben Kreis nur ein Perpendikel auf einer Seite der Kugelfläche gezogen werden. Denn wäre außer AB etwa noch AC' ein Perpendikel, ſo würde A der Pol von EBE'B' ſeyn (§. 7. Zuſ. 2.) gegen die Annahme. Dagegen ſind ſtets zwei ſchiefe Bogen von gleicher Länge in verſchiedenen Lagen von jenem Punkte nach dem Kreiſe möglich; aber auch nur zwei. —

Das Perpendikel, und zwar das kürzeſte, wird daher als das Maaß der Entfernung eines Punktes von einem Hauptkreiſe betrachtet.

Zuſatz 5. Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken (wie ABC, ABD) eine Kathete gleich, die andere aber in dem einen Dreiecke größer, als im andern iſt, und beide Katheten $< \frac{\pi}{2}$ ſind; ſo liegt der größeren Kathete ein größerer Winkel gegenüber, auch eine größere Hypotenuſe an derſelben, aber ein kleinerer Winkel an ihr. Umgekehrt: Iſt eine Kathete in beiden Dreiecken gleich, die Hypotenuſe in dem einen größer als in dem andern, auch die Katheten jedes Dreieckes $< \frac{\pi}{2}$; ſo iſt mit der größern Hypotenuſe eine größere Kathete verbunden, welcher gegenüber ein größerer und an welcher ein kleinerer (ſchiefer) Winkel liegt.

Zuſatz 6. Zwei rechtwinkliche Dreiecke ſind einander gleich, wenn eine Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleich und die Katheten jedes Dreieckes gleichartig ſind.

Zuſatz 7. Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenuſen und gleichartigen Katheten, (oder: von gleichen Hypotenuſen und die $< \frac{\pi}{2}$ ſind) eine Kathete des einen Dreieckes größer als eine Kathete des andern iſt, ſo

iſt die zweite Kathete des erſteren Dreieckes kleiner, als die zweite des andern.

Denn es ſeyen (Figur 27. b.) die Dreiecke ABC, A'B'C' an B, B' rechtwinklich, AC=A'C', und $A'B' < AB$. Sind nun

1) die Katheten all: $<\frac{\pi}{2}$; ſo mache man BA''=A'B' und ziehe A''C. Es kann nun nicht B'C'=BC ſeyn, weil die Dreiecke A'B'C', ABC einander gleich ſeyn müßten. (§. 20.) Auch kann nicht $B'C' < BC$ ſeyn; denn wäre etwa B'C'=BC'', ſo wäre A'C'=A''C''. Nach Zuſ. 5. iſt aber $A''C'' < A''C$, und $A''C < AC$; alſo müßte $A'C' < AC$ ſeyn, gegen die Vorausſetzung. Folglich muß $B'C' > BC$ ſeyn.

2) Sind die Katheten alle $>\frac{\pi}{2}$, ſo ſeyen die rechtwinklichen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; wo A, A' die rechten Winkel, und die Katheten b, c, b', c', $>\frac{\pi}{2}$ ſind, und es ſey $b < b'$. In den Nebendreiecken $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\bar{\alpha}'\beta'\gamma'$ ſind dann die Katheten $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, alle $<\frac{\pi}{2}$ und $\bar{b} > \bar{b}'$; alſo nach dem Erwieſenen $\bar{c} < \bar{c}'$; folglich in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; $c > c'$.

Zuſatz 8. Sind aber im vorigen Zuſatze die Katheten ungleichartig, oder, was daſſelbe ſagt, die gleichen Hypotenuſen $>\frac{\pi}{2}$; ſo ſind die Katheten des einen Dreieckes beide zugleich kleiner oder größer, als die des andern.

Denn ſind die Katheten b, $b' < \frac{\pi}{2}$; aber c, $c' > \frac{\pi}{2}$ und $b < b'$; ſo ſind in den rechtwinklichen Nebendreiecken $\alpha\bar{\beta}\gamma$, $\alpha'\bar{\beta}'\gamma'$ alle Katheten gleichartig; $b < b'$; daher $\bar{c} > \bar{c}'$; folglich auch $c < c'$.

Zuſatz 9. Die beiden Zuſätze 8. und 9. laſſen ſich ſo zuſammenfaſſen: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenuſen eine Kathete des einen Dreieckes von dem Quadranten entfernter als eine Kathete des andern iſt; ſo iſt die zweite Kathete des erſten Dreieckes dem Quadranten näher, als die zweite Kathete des andern Dreieckes.

Zuſatz 10. In Zuſ. 7. und Zuſ. 8. liegt auch der kleinern Kathete ein kleinerer Winkel gegenüber, d. h. Winkel B'C'A iſt kleiner als BCA; weil BC'A'' $<$ BCA'' und BCA'' $<$ BCA iſt. Hier ſind zwar beide Katheten $<\frac{\pi}{2}$; indeß die Vergleichung der Nebendreiecke $\bar{\alpha}\beta\gamma$ und $\alpha\bar{\beta}\gamma$ nach dem vorher gezeigten Verfahren ergiebt die Allgemeingültigkeit des Satzes: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenuſen eine Kathete des einen Dreieckes kleiner als eine Kathete des andern iſt, ſo liegt er kleinern Kathete ein kleinerer Winkel gegenüber.

Zuſatz 11. Die Umkehrung: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenuſen ein ſchiefer Winkel des einen Dreiecks kleiner als ein ſchiefer Winkel des andern Dreiecks iſt, ſo liegt dem kleinern Winkel eine kleinere Kathete gegenüber — iſt aus dem Vorhergehenden klar.

Anmerk. Die Zuſätze 3 bis 6. des §. 28. ließen ſich auch hier leicht ableiten.

§. 39.

Lehrſatz. Wenn aus einer Spitze eines ſphäriſchen Dreieckes ein Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite gefällt wird, ſo liegt dies innerhalb des Dreieckes, wenn die andern beiden Winkel deſſelben gleich-

artig ſind; außerhalb aber, wenn jene Winkel ungleichartig ſind.

Beweis. Sind in dem Dreiecke ABC (Figur 28.) die Winkel B und C gleichartig, und das Perpendikel von A auf BC fiele außerhalb des Dreieckes, wie AD; ſo würden in den rechtwinklichen Dreiecken ADC, ADB die Winkel ACD, ABD mit der Kathete AD gleichartig, alſo die Winkel ABD, ACB ungleichartig ſeyn, gegen die Vorausſetzung; alſo muß das Perpendikel innerhalb des Dreieckes liegen.

Sind aber die Winkel B, C ungleichartig und das Perpendikel läge im Dreiecke, etwa wie AE; ſo müßten die ungleichartigen Winkel B, C der gemeinſchaftlichen Kathete AE gleichartig ſeyn, was ſich widerſpricht. Folglich muß das Perpendikel außerhalb liegen.

Zuſatz 1. Das Perpendikel im Dreiecke iſt kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die Winkel an der Grundſeite ſpitze oder ſtumpfe ſind. Das Perpendikel außerhalb des Dreieckes iſt mit dem Winkel an der Grundlinie gleichartig, dem es gegenüberſteht.

Zuſatz 2. Das Perpendikel ſteht dem dem Rechten näheren Winkel an der Grundſeite, ſo wie der von dem Quadranten entferntern Seite (§. 27. Zuſ. 1.) des Dreieckes näher, als dem andern Winkel an der Grundſeite und der an demſelben liegenden Seite. (§. 38. Zuſ. 1. 2.) Daher iſt von den Abſchnitten, welche durch das Perpendikel auf der Grundſeite gebildet werden, der an dem oben bezeichneten Winkel liegende immer kleiner als im Quadranten. Und hieraus folgt, daß von den beiden Theilen des Winkels an der Spitze, welche durch das Perpendikel gebildet werden, derjenige, welcher dem kleinern Abſchnitte gegenüberſteht, immer ein ſpitzer ſeyn muß.

Zuſatz 3. Iſt einer von den Winkeln B, C an der Grundſeite unbekannt, ſo läßt ſich die Lage des Perpendikels aus der ihm gegenüberliegenden Seite, aus dem andern Winkel an der Grundſeite und der dritten Seite beſtimmen.

Es ſey nämlich der Winkel C unbekannt, aber die Seiten AB, AC, und der Winkel B bekannt; ſo liegt das Perpendikel innerhalb des Dreieckes, wenn AB dem Quadranten nicht näher als AC und mit dem Winkel B gleichartig iſt; außerhalb des Dreieckes liegt das Perpendikel, wenn unter denſelben Umſtänden AB und B ungleichartig ſind. Denn iſt AB entfernter vom Quadranten, oder eben ſo nahe, als AC und zugleich AB gleichartig mit B, ſo iſt AB mit C, alſo auch B mit C gleichartig und das Perpendikel liegt im Dreiecke. Iſt aber unter derſelben Vorausſetzung AB und B ungleichartig, ſo ſind es auch B und C; daher liegt das Perpendikel außerhalb. — Findet indeß jene Vorausſetzung nicht ſtatt, iſt alſo AB dem Quadranten näher als AC, und ſind weiter keine Stücke des Dreieckes bekannt, ſo läßt ſich die Lage des Perpendikels nicht beſtimmen, weil durch die genannten drei Stücke das Dreieck ſelbſt nicht beſtimmt iſt, ſondern zwei verſchiedene Dreiecke denſelben entſprechen, wo das Perpendikel einmal in, das andere Mal außer dem Dreiecke liegt. (cf. §. 41. II.)

§. 40.

Lehrſatz. Das Perpendikel aus der Spitze eines gleichſchenklichen ſphäriſchen Dreieckes auf die Grundſeite halbirt den Winkel an der Spitze, wie die Grundſeite.

Beweis. In dem ſphäriſchen Dreiecke ABC (Figur 29. a.) ſey AB = AC; ſo iſt auch B = C und das Perpendikel von A auf BC liegt innerhalb des Dreieckes. Es ſey AD. Da in den rechtwinklichen Dreiecken ADB, ADC die Hypotenuſe (AB, AC) und eine Kathete (AD = AD) gleich iſt, ſo ſind die Dreiecke gleich (§. 29. Zuſ. 2.) und es iſt BD = DC; BAD = CAD.

Anmerk. Indirekt folgt der Satz aus §. 39. Zuſ. 2.

Zuſatz 1. Umgekehrt: Der aus der Spitze auf die

Mitte der Grundſeite des gleichſchenklichen Dreieckes gehende Bogen ſteht auf ihr ſenkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze. Und: Der den Winkel an der Spitze halbirende Bogen ſteht auf der Mitte der Grundſeite ſenkrecht.

Zuſatz 2. Auch, wenn die Summe zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes $=\pi$ iſt, trifft der den Winkel jener Spitze halbirende Bogen die Mitte der dritten Seite. Denn es ſey in dem Dreiecke ABC (Figur 29. b.) $AB+AC=\pi$; dann iſt auch $ABC+ACB=\pi$. Verlängert man AB, AC bis zum zweiten Durchſchnitt in A', ſo iſt $A'C+AC=AB+AC$; daher $A'C=AB$. Eben ſo iſt Winkel $A'CD+BCA=ABD+BCA$; daher $A'CD=ABD$. Nimmt man hiezu noch $BDA=CDA'$; ſo iſt die Gleichheit der Dreiecke BDA und CDA' evident; daher $BD=DC$. — Die Umkehrung bedarf keiner Auseinanderſetzung.

Daher läßt ſich der allgemeinere Satz aufſtellen:

Sind zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes dem Quadranten gleich nahe, ſo wird die dritte Seite mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel durch einen und denſelben Bogen halbirt.

§. 41.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Dreieck aus drei Stücken deſſelben zu konſtruiren.

Auflöſung. Die möglichen Ternen, welche aus den Seiten und Winkeln eines ſphäriſchen Dreieckes gebildet werden können, ſind: 1) Drei Seiten, 2) zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, 3) eine Seite mit den anliegenden Winkeln, 4) drei Winkel, 5) zwei Seiten mit dem einen von dieſen Seiten gegenüberliegenden Winkel, 6) zwei Winkel mit einer Seite, die einem jener Winkel gegenüberſteht.

Die Fälle 1), 2), 3) werden aufgelöſt, wie bei ebnen Dreiecken; daher wir ſogleich zu den folgenden übergehen.

I. Die drei Winkel des zu konſtruirenden Dreieckes ſeyen A, B, C.

Man nehme (Figur 30.) drei auf einander ſenkrechte Hauptkreiſe $PQP'Q'$, QRQ', PRP' und konſtruire eine Spindel $PMNP'$, deren Winkel $=A$, ſo daß ſie durch PRP halbirt wird. Um die Gegenpunkte Q, Q' beſchreibe man mit dem ſphäriſchen Radius $=\frac{1}{2}A$ Kreiſe, welche QRQ' in q, q' ſchneiden; um q mit dem Radius $=B$ und um q' mit dem Radius $=C$ beſchreibe man Kreiſe, welche den Durchſchnitt p geben. Um p als Pol beſchreibe man einen Hauptkreis, der in G, F, die Spindel $PMNP'$ ſchneide; ſo iſt PGF das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Gegenpunkt von p ſey p', ſo iſt $qq'p'$ das Polardreieck von GPF. Denn q iſt der Pol von PFP', weil $Qq=\frac{1}{2}A=RN$, daher $qN=QR=\frac{1}{2}\pi$ und auf PNP' ſenkrecht iſt. Auf ähnliche Weiſe folgt, daß q' der Pol von PMP' iſt; p' aber iſt als Gegenpunkt von p der Pol von GF. Daher iſt Winkel $PGF=$ Supplement von $q'p'$ und da auch $pq'=(\pi-p'q')$ iſt; ſo iſt $PGF=pq'=C$. Eben ſo iſt $PFG=(\pi-qp')=pq=B$; der Winkel GPF iſt der Konſtruktion wegen $=A$; folglich hat das Dreieck FGP die gegebenen Winkel.

Eine andere vielleicht einfachere Aufloſung iſt folgende:

Man konſtruire ein Dreieck aus den Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ und beſchreibe um die Winkelſpitzen desſelben als Pole drei Hauptkreiſe; ſo bilden dieſe das verlangte Dreieck.

Beweis ergiebt ſich aus §. 15. und §. 16.

II. Um aus zwei Seiten a, b und einem der nicht eingeſchloſſenen Winkel B, das Dreieck zu konſtruiren, nehme man (Figur 31.) $AD=a$; lege an D einen Bogen DE, der mit AD den gegebenen Winkel B bildet; beſchreibe um A mit dem Radius $=b$ einen

Kreis, der in C den Bogen ED ſchneide, ſo iſt CAD das geforderte Dreieck.

III. Endlich aus zwei Winkeln A, B und einer gegenüberſtehenden Seite konſtruirt man ein ſphäriſches Dreieck, wenn man aus den Seiten $\bar{A}$, $\bar{B}$ und dem Winkel $\bar{b}$ ein Dreieck (nach II.) verzeichnet und deſſen Polardreieck nimmt.

Zuſatz 1. Bei der in II. angegebenen Konſtruktion fällt in die Augen, daß außer C noch ein zweiter Durchſchnitt C′ des Bogens DE mit dem Nebenkreiſe um A da ſeyn muß, weil ein Kreis immer zwei Durchſchnittspunkte hat (§. 4.); daß alſo zwei Dreiecke CAD, C′AD möglich ſeyn können, welche der Aufgabe genügen. Nach §. 29. iſt aber ein ſphäriſches Dreieck durch die Seiten a, b und den Winkel B völlig beſtimmt, wenn b dem Quadranten näher iſt, als a, oder eben ſo nahe.

Daraus ergiebt ſich, daß obige Zweideutigkeit nur dann ſtatt finden könne, wenn b entfernter vom Quadranten iſt, als a.

Wir wollen noch nachweiſen, daß in dieſem Falle immer zwei und nur zwei verſchiedene Dreiecke der Aufgabe genügen. Es ſey nämlich (Figur 27.) AD = a gemacht und DE′ ſo an AD gelegt, daß Winkel ADE′ = B. Die zweite gegebene Seite b muß nun in jedem Falle ſo liegen, daß der eine Endpunkt in A, der andre in den Halbkreis DE′D′ fällt; denn fiele er in DED′, ſo würde entweder $b > \pi$, oder der Winkel ADE′ nicht im Dreiecke ſeyn. Iſt alſo AB ſenkrecht auf E′D gezogen, ſo muß b entweder zwiſchen AD und AB, oder zwiſchen AD′ und AB fallen. Von den Bogen BD und BD′ ſey BD der kleinere und BD″ = BD genommen; ſo liegen zwiſchen AB und AD dieſelben Bogen, wie zwiſchen AB und AD″ (§. 38. Zuſ. 3.); die Bogen aber zwiſchen AD″ und AD′ finden ſich nicht zwiſchen AB und AD. Zugleich ſind die zwiſchen AD″ und AD liegen-

den Bogen entfernter vom Quadranten, als die zwiſchen AD″ und AD′. Iſt alſo b entfernter vom Quadranten, als a (AD), ſo liegt es zwiſchen AD″ und AD und hat zweierlei Lagen, zu beiden Seiten des Perpendikels, etwa wie AC und AC′, wodurch die beiden der Aufgabe entſprechenden Dreiecke ADC, ADC′ entſtehen. Daß b nur zwei Lagen haben, alſo nur zwei verſchiedene Dreiecke den gegebenen Stücken genügen können, folgt aus §. 38. —

Wäre b dem Perpendikel AB ſelbſt gleich, alſo das Maximum oder Minimum der Bogen, welche von A nach DE′ gehen können (§. 38.): ſo könnte es nur eine Lage haben, und es würde nur ein Dreieck möglich ſeyn.

Dieſer Fall alſo, der äußerſte unter allen möglichen, macht eine Ausnahme.

Es würde in dieſem Falle der (nach II.) um A beſchriebene Kreis den Bogen DE nur berühren.

Zuſatz 2. Da die Auflöſung in III. von der in II. abhängt, ſo findet dort dieſelbe Zweideutigkeit und Entſcheidung derſelben ſtatt, wie ſich mit Hülfe des Polardreieckes leicht darthun läßt. Die Entſcheidung iſt: Aus zwei Winkeln A, B, und einer nicht eingeſchloſſenen Seite b laſſen nur dann zwei verſchiedene Dreiecke ſich bilden, wenn B vom Rechten entfernter iſt als A.

Zuſatz 3. Ganz allgemein für II. und III. läßt ſich das Geſetz der Zweideutigkeit ſo ausſprechen:

Iſt unter den gegebenen Stücken dasjenige, welches einem Gegebenen gegenüberſteht, vom Quadranten oder Rechten entfernter, als das dritte Gegebene, ſo findet Zweideutigkeit ſtatt; ſonſt nicht.

§. 42.

Aufgabe. Den Punkt der Kugelfläche zu finden, der von allen Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes gleichen Abſtand hat.

Auflöſung. Man halbire zwei Winkel des Dreieckes durch Bogen; ſo iſt der Durchſchnitt derſelben der geforderte Punkt.

Beweis. In dem Dreiecke ABC (Figur 32.) ſeyen die Winkel A und C halbirt und D der Durchſchnitt der Halbirungsbogen. Von D fälle man auf die Seiten des Dreieckes die Perpendikel DE, DF, DG und ziehe DB.

Die rechtwinklichen Dreiecke ADE, ADF ſind gleich, weil AD = AD; EAD = FAD (§. 30. Zuſ. 2.); daher iſt DE = DF. Aus demſelben Grunde ſind die Dreiecke DFC, DGC einander gleich; daher DF = DG. Mithin iſt DF = DG = DE; alſo D von allen Seiten gleich entfernt.

Zuſatz 1. Da in den rechtwinklichen Dreiecken DEB, DGB die Hypotenuſe und eine Kathete gleich iſt (DB = DB; DG = DE); ſo ſind auch dieſe Dreiecke gleich und Winkel EBD = GBD; alſo auch der dritte Winkel halbirt.

Zuſatz 2. Ein Kreis um D als Mittelpunkt mit dem Radius = DE beſchrieben, geht durch die Punkte E, F, G und liegt innerhalb des Dreieckes, weil alle übrigen Punkte der drei Seiten einen größern Abſtand von D haben, als der Radius iſt. (§. 38.) Der Kreis berührt alſo nur die Seiten.

§. 43.

Aufgabe. Den Punkt der Kugelfläche zu finden, welcher von allen Spitzen eines ſphäriſchen Dreieckes gleichen Abſtand hat.

Auflöſung. Durch die Mittelpunkte zweier Seiten des Dreieckes lege man Perpendikel auf dieſelben; der Durchſchnitt derſelben iſt von allen Ecken des Dreieckes gleich entfernt.

Beweis. Es ſeyen (Figur 33.) D und E die Mittelpunkte der Seiten AB und AC, F der Durchſchnitt der auf jene Seiten ſenkrechten Bogen DF, EF. Die zu erweiſende Gleichheit der Bogen FA, FB, FC ergiebt ſich ſo:

Die an D rechtwinklichen Dreiecke ADF, BDF ſind gleich, weil AD = DB und FD = FD; daher iſt AF = BF. Die an E rechtwinklichen Dreiecke AEF, CEF ſind wegen AE = EC und EF = EF einander gleich; daher AF = CF. Mithin ſind die drei Bogen AF, BF, CF unter ſich gleich.

Zuſatz 1. Da das Dreieck BFC gleichſchenklich iſt, wird auch die dritte Seite BC durch das von F gefällte Perpendikel FG halbirt.

Zuſatz 2. Da FA, FB größer als alle Bogen ſind, welche von F auf die Seite AB zwiſchen A und B fallen (§. 38. Zuſ. 1.) und daſſelbe von den andern Seiten AC, BC gilt; ſo muß der Nebenkreis, welcher um F als Mittelpunkt mit dem Radius AF beſchrieben wird und alſo durch die Spitzen A, B, C geht, ganz außerhalb des Dreieckes liegen. Der Kreis iſt alſo ein umgeſchriebener, wie der im vorigen Paragraphen ein eingeſchriebener.

Zuſatz 3. Der Durchſchnitt F der Perpendikel DF, EF kann auch außerhalb des Dreieckes liegen; denn in einem Nebenkreiſe ſind Dreiecke möglich, in denen der Mittelpunkt des Kreiſes nicht iſt.

Anmerk. Der Kürze wegen mag der Radius des um ein Dreieck beſchriebenen Kreiſes der Umſchreibungsradius und eben ſo Einſchreibungsradius der Radius des in ein Dreieck beſchriebenen Kreiſes heißen.

§. 44.

Lehrſatz. Der Umſchreibungsradius eines ſphäriſchen Dreieckes iſt das Komplement des Einſchreibungsradius des Polardreieckes und umgekehrt.

Beweis. Es ſey (Figur 34. a.) ABC ein ſphäriſches

Dreieck und A', B', C' bezüglich die Pole von BC, AC, AB, alſo A'B'C' das Polardreieck. In dem Dreiecke ABC ſey G der Mittelpunkt des um ABC beſchriebenen Kreiſes, alſo die Radien GA, GB, GC einander gleich. Verlängert man dieſe bis ſie die Seiten des Polardreieckes bezüglich in D, E, F treffen, ſo ſind AD, BE, CF Quadranten, weil A, B, C die Pole der Seiten B'C', A'C', A'B' ſind; daher auch GD=GE=GF. Nach §. 11. Zuſ. 5. ſtehen dieſe ſenkrecht auf den betreffenden Seiten des Polardreieckes, daher iſt (wegen §. 42. Zuſ. 2.) G zugleich der Mittelpunkt des in das Polardreieck beſchriebenen Kreiſes und deſſen Radius =GD. Da nun GD das Komplement von GA iſt, ſo iſt der Lehrſatz evident, deſſen Umkehrung daraus hervorgeht, daß auch ABC das Polardreieck von A'B'C' iſt.

Zuſatz. Die Kreiſe, von denen der eine um ein ſphäriſches Dreieck, der andere in das Polardreieck beſchrieben iſt, haben einerlei Mittelpunkt, ſind alſo Parallelkreiſe.

§. 45.

Aufgabe. Die Winkel zu beſtimmen, unter welchen die Ebne des Sehnendreieckes (d. i. des durch die Sehnen der Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes gebildeten ebnen Dreieckes) ſich gegen die Ebnen der Seiten des ſphäriſchen Dreieckes neigt.

Auflöſung und Beweis. Die Ebne des Sehnendreieckes iſt die Ebne des durch die Spitzen des ſphäriſchen Dreieckes gelegten, oder um daſſelbe beſchriebenen, Kreiſes. Die Aufgabe kommt alſo darauf zurück, die Winkel des umgeſchriebenen Kreiſes mit den Hauptkreiſen, deren Bogen das ſphäriſche Dreieck bilden, zu beſtimmen. Der Winkel zweier Kreiſe iſt nun das Supplement ihrer Polabſtände. Man konſtruire alſo in dem Dreiecke ABC (Figur 34. b.) den

Mittelpunkt G des umgeſchriebenen Kreiſes, indem man durch die Mitte zweier Seiten AC, BC, die Perpendikel GD, GE legt. Der Gegenpunkt von G ſey G′; der Pol von AB ſey γ; ſo iſt γG′ die Entfernung der hiehergehörigen (poſitiven) Pole. Ihr Supplement iſt γG, welches verlängert die Seite AB ſenkrecht in F trifft (§. 11. Zuſ. 5.), und welches das Komplement von GF, dem vom Mittelpunkt des umgeſchriebenen Kreiſes auf AB fallenden Perpendikel, iſt.

Man lege alſo durch die Mittelpunkte der Seiten des ſphäriſchen Dreieckes Perpendikel, welche ſich in Einem Punkte ſchneiden; ſo ſind dieſe die Komplemente der Winkel, unter welchen ſich das Sehnendreieck gegen die betreffenden Seiten des ſphäriſchen Dreieckes neigt.

Zuſatz 1. Sind zwei Seiten des Dreieckes, etwa AC, BC, gleich; ſo ſind es auch die Perpendikel GD, GE derſelben; alſo das Sehnendreieck unter gleichen Winkeln gegen die gleichen Seiten geneigt.

Zuſatz 2. Bei gleichſeitigen Dreiecken ſind alle drei Neigungswinkel des Sehnendreieckes gleich.

§. 46.

Aufgabe. Den Winkel zu beſtimmen, unter welchem die Ebnen der Sehnendreiecke zweier Polardreiecke ſich gegen einander neigen.

Aufgabe. In einem der beiden Dreiecke ABC (Figur 35.) lege man durch die Mittelpunkte D, E zweier Seiten AC, BC ſenkrechte Bogen, deren Durchſchnitt G ſey; dann halbire man zwei Winkel A, C des Dreieckes durch Bogen, deren Durchſchnitt in H ſey; ſo iſt der Bogen GH

dem Supplemente des geſuchten Neigungswinkels gleich, deſſen Nebenwinkel alſo = GH.

Beweis. Die Ebnen der Sehnendreiecke zweier Polardreiecke ſind die Ebnen der um beide beſchriebenen Kreiſe. Da nach §. 44. Zuſ. der um ein Polardreieck beſchriebene Kreis parallel iſt dem in des andern beſchriebenen Kreiſe; ſo iſt der geſuchte Neigungswinkel gleich dem Winkel der in und um das Dreieck ABC beſchriebenen Kreiſe, deren Mittelpunkte G und H ſind. (§. 42. Zuſ. 2. und §. 43. Zuſ. 2.) Sind nun G′ und H′ die Gegenpunkte von G und H; ſo ſind G′, H′ die auf den dem Mittelpunkt der Kugel zugekehrten Seiten der Kreisebnen liegenden (poſitiven) Pole, alſo ihr Abſtand G′H′, welcher = GH, das Supplement des geſuchten Winkels (§. 12.), der alſo = GH′ iſt.

Zuſatz. Die um und in ein ſphäriſches Dreieck beſchriebenen Kreiſe neigen ſich gegen einander unter denſelben Winkeln, wie die um und in das Polardreieck beſchriebenen Kreiſe.

Von dem Flächenraume ſphäriſcher Dreiecke und Polygone.

§. 47.

Lehrſatz. Zwei ſphäriſche Spindeln haben gleichen Flächenraum, wenn ihre Winkel gleich ſind.

Beweis. Die Winkel APB, DPC (Figur 36.) der Spindeln PABP′ und PDCP′ ſeyen einander gleich. Man lege PCP′ auf PAP′, ſo fällt PDP′ auf PBP; die Spindeln decken ſich, haben alſo gleiche Flächenräume.

§. 48.

Lehrſatz. Sind zwei ſphäriſche Dreiecke ihren

Winkeln und Seiten nach gleich, ſo haben ſie gleichen Flächenraum.

Beweis. In den Dreiecken ABC, A'B'C' (Figur 37.) ſey AB = A'B'; AC = A'C' u. ſ. w. und D, D' ſeyen die Mittelpunkte der eingeſchriebenen Kreiſe; alſo die Perpendikel DE, DF, DG ſo wie D'E', D'F', D'G' unter ſich gleich, und die Winkel A, A', B, B' durch AD, A'D', BD, B'D' halbirt. Die Dreiecke DAB, D'A'B' ſind einander gleich, weil AB = A'B'; Winkel $DAB = \frac{1}{2} CAB = \frac{1}{2} C'A'B' =$ D'AB'; und ebenſo DBA = D'B'A' iſt; daraus folgt AD = A'D'. Die an G, G' rechtwinklichen Dreiecke AGD, A'G'D' ſind gleich, weil AD = A'D' und Winkel DAG = D'A'G' (§. 30. Zuſ. 2.); daraus folgt DG = D'G' und AG = A'G'. Es ſind alſo die Einſchreibungsradien beider Dreiecke gleich; und wie AG = A'G' bewieſen wurde, ſo läßt ſich die Gleichheit aller übrigen gleichbezeichneten Theile auf den Seiten beider Dreiecke darthun. Ueberdies iſt nach §. 42. AG = AF; A'G' = A'F'; folglich auch A'F' = AG; A'G' = AF. Man muß daher die Vierecke AFDG, A'F'D'G' ſo auf einander legen, daß ſie ſich decken; nämlich AF mit A'G', AG mit A'F' u. ſ. w. Daher haben dieſe Vierecke gleichen Flächenraum. Eben ſo ergiebt ſich die Deckung der Vierecke FDEC mit F'D'E'C' und GDEB mit G'D'E'B'. Da dieſe drei Vierecke bezüglich gleiche Flächenräume haben, ſo ſind auch ihre Summen, die Flächenräume der Dreiecke, einander gleich.

Zuſatz. Gegendreiecke haben alſo auch gleiche Flächenräume; desgleichen Gegenpolygone, weil ſie ſich durch Diagonalen in lauter Gegendreiecke zerlegen laſſen.

§. 49.

Lehrſatz. Der Flächenraum der ſphäriſchen Spindel verhält ſich zu der Kugelfläche,

wie der Winkel der Spindel zu vier Rechten.

Beweis. Der Winkel APB (Figur 36.) der Spindel PABP′ ſey mit W, die Summe von vier Rechten durch O; der Flächenraum der Spindel mit S, die Kugelfläche mit K bezeichnet. Es ſind nun entweder W und O kommenſurabel oder inkommenſurabel.

1) Sind ſie kommenſurabel, ſo ſey ein Winkel w das gemeinſchaftliche Maaß, dem eine Spindel s entſpricht, und es ſey $W = nw$; $O = mw$; ſo iſt wegen §. 48. $S = ns$; $K = ms$; alſo $\frac{W}{O} = \frac{n}{m}$; und $\frac{S}{K} = \frac{n}{m}$; daher $\frac{W}{O} = \frac{S}{K}$.

2) Sind W und O inkommenſurabel und es wäre nicht $\frac{W}{O} = \frac{S}{K}$; ſo ſey $\frac{W+v}{O} = \frac{S}{K}$, wo v irgend einen Winkel bedeutet. Jedenfalls läßt ſich nun v in zwei Theile v', v'' zerlegen, ſo daß $(W+v')$ mit O kommenſurabel iſt, und es gehöre zu dem Winkel v' die Spindel s'. Dann iſt nach dem eben bewieſenen $\frac{W+v'}{O} = \frac{S+s'}{K}$; nach der Annahme aber $\frac{W+v}{O} = \frac{S}{K}$. Da nun $S+s' > S$ iſt, ſo müßte auch $W+v' > W+v$; alſo der Theil v' größer als das Ganze v ſeyn; was ungereimt iſt.

Eben ſo zeigt man, daß auch nicht $\frac{W-v}{O} = \frac{S}{K}$ ſeyn kann. Alſo muß in jedem Falle $\frac{W}{O} = \frac{S}{K}$ ſeyn.

Zuſatz 1. Nimmt man als Winkeleinheit denjenigen Winkel u, der als Centriwinkel durch den dem Radius gleichen Bogen gemeſſen wird; ſo iſt bekanntlich $O = 2\pi u$ und es ſey $W = wu$, wo w eine Zahl bedeutet.

Digitized by Google

Nimmt man ferner das Quadrat des Kugelradius R zur Einheit des Flächenraumes, ſo iſt $K = 4\pi R^2$, und es ſey $S = sR^2$, wo auch s eine Zahl iſt.

Nach dem Lehrſatze iſt alſo $\frac{wu}{2\pi u} = \frac{sR^2}{4\pi R^2}$ oder $w = \frac{s}{2}$; woraus $s = 2w$ folgt; das heißt: die Verhältnißzahl des Flächenraumes der Spindel iſt das Doppelte der Verhältnißzahl des Winkels, wenn Spindel und Winkel auf die oben genannten Einheiten bezogen werden. Der Kürze wegen drückt man dies ſo aus: der Flächenraum der Spindel iſt doppelt ſo groß, als ihr Winkel; wobei man indeß immer nur die Zahlen, durch welche jene Größen den angenommenen Einheiten nach gemeſſen werden, meint.

Zuſatz 2. Nimmt man (Figur 36.) die Bogen PA, PB, jeden gleich einem Quadranten, ſo iſt der Bogen AB das Maaß des Winkels P, d. h. wenn als Längeneinheit der Radius (der Kugel), und als Winkeleinheit der oben bezeichnete Winkel genommen werden, ſo hat AB dieſelbe Verhältnißzahl w, wie P; es iſt $AB = wR$. Da die Spindel $S = 2wR^2$ iſt, ſo iſt auch $S = 2AB$. R, oder $= 2AB$, wenn man die Einheit R unterdrückt. Es iſt alſo der Flächenraum der Spindel gleich dem doppelten Rechtecke, deſſen eine Seite der Radius der Kugel, deſſen andere Seite dem Bogen gleich iſt, der den Winkel der Spindel mißt.

In dem oben bezeichneten Sinne kann man auch hier ſagen: der Flächenraum der Spindel iſt gleich dem doppelten Bogen ihres Winkels. —

Die Kugelfläche iſt ſonach $= 4\pi =$ einer Spindel deren Winkel $= 4$ Rechten.

Anmerk. Der uneigentliche Ausdruck: der Flächenraum der Spindel iſt ihrem doppelten Winkel gleich, — kann recht wohl geduldet werden, wenn man ihn nur richtig verſteht. Denn der ſonſt auch übliche Ausdruck: der Flächenraum der Spindel hat zum Maaße den doppelten Winkel, oder wird durch den doppelten Winkel gemeſſen — iſt nicht weniger uneigentlich, da

daſs Maaſs mit dem zu Meſſenden gleichartig ſeyn muſs; Flächenraum und Winkel (oder Bogen) aber heterogene Dinge ſind.

Der Kürze wegen werden wir uns alſo in der Folge des Ausdruckes bedienen: „der Flächenraum F iſt dem Winkel W oder Bogen B gleich" — und verſtehen darunter eigentlich: „die Verhältniſszahl f iſt der Verhältniſszahl w oder b gleich" — wo $f = \frac{F}{R^2}$; $w = \frac{W}{u}$ (Zuſ. 1.); $b = \frac{B}{R}$ iſt.

§. 50.

Lehrſatz. Der Flächenraum des ſphäriſchen Dreieckes iſt dem Ueberſchuſſe der Summe ſeiner Winkel über zwei Rechte gleich.

Beweis. Es ſey (Figur 38.) ABC ein ſphäriſches Dreieck, deſſen Seiten, zu Hauptkreiſen vollendet, ſich zum zweiten Male in den Gegenpunkten A', B', C' ſchneiden und ſo acht Dreiecke bilden, welche die ganze Kugelfläche einnehmen, und von denen je zwei Gegendreiecke ſind, alſo gleichen Flächenraum haben. Bezeichnet man das Dreieck ABC mit T; deſſen Nebendreiecke A'BC, AB'C, ABC' bezüglich durch T', T'', T'''; die Gegendreiecke dieſer viere durch t, t', t'', t'''; ſo iſt $T + T' + T'' + T''' + t + t' + t'' + t''' = 4\pi$ (§. 49. Zuſ. 2.); und da $T = t$; $T' = t'$ u. ſ. w., ſo iſt $2(T + T' + T'' + T''') = 4\pi$; alſo $T + T' + T'' + T''' = 2\pi$. Verbindet man T mit jedem ſeiner Nebendreiecke, ſo erhält man drei Spindeln mit den Winkeln des Dreieckes. Es iſt dann $T + T' = 2A$; $T + T'' = 2B$; $T + T''' = 2C$; addirt man dieſe Gleichungen, ſo erhält man $3T + T' + T'' + T''' = 2(A + B + C)$; hievon die Gleichung $T + T' + T'' + T''' = 2\pi$ abgezogen, giebt $2T = 2(A + B + C) - 2\pi$, woraus $T = A + B + C - \pi$ folgt.

Anmerk. Auch hieraus ergiebt ſich, daſs die Summe der Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes gröſser als zwei Rechte iſt, und zwar um den Flächenraum des Dreiecks.

Zuſatz. Da die Winkelſumme ſtets $< 3\pi$ iſt, ſo muſs

$T < 2\pi$ d. h. der Flächenraum des Dreieckes kleiner als die halbe Kugelfläche ſeyn.

§. 51.

Lehrſatz. Der Flächenraum eines ſphäriſchen Polygones iſt gleich der Summe aller Winkel deſſelben, weniger ſo oftmal zwei Rechte, als das Polygon Seiten weniger zwei hat.

Beweis. Es ſey (Figur 39.) ABCD.... ein ſphäriſches Polygon von n Seiten. Zieht man von einem innerhalb des Polygones beliebig gewählten Punkte P Bogen nach den Ecken deſſelben, ſo zerfällt das Polygon in n Dreiecke. Es iſt nun $PAB = \alpha' + \beta' + \varphi' - \pi$;

$$PBC = \alpha'' + \beta'' + \varphi'' - \pi \text{ u. ſ. w.}$$

Mithin die Summe aller Dreiecke

$$\begin{aligned} PAB + PBC + \ldots\ldots &= \alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' + \ldots\ldots \\ &\quad + \varphi' + \varphi'' + \ldots\ldots \\ &\quad - n\pi; \end{aligned}$$

es iſt nun $\alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' + \ldots\ldots = A + B + C + \ldots\ldots$; und $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \ldots\ldots = 2\pi$; daher die Summe aller Dreiecke, oder der Flächenraum des Polygones

$$= (A + B + C + \ldots\ldots) + 2\pi - n\pi;$$
$$= (A + B + C + \ldots\ldots) - (n-2)\pi.$$

Zuſatz 1. Der Satz gilt auch von Polygonen mit einwärts gehenden Winkeln, wenn man nicht dieſe, ſondern die überſtumpfen innern Winkel (die Implemente jener) als Winkel des Polygones betrachtet; denn es iſt hier dieſelbe Zerfällung in n Dreiecke möglich.

Zuſatz 2. Nimmt man den Punkt P auf einer Seite des Polygones, ſo verſchwindet ein Dreieck und man erhält nur (n—1) Dreiecke. Rückt man P in eine Ecke des Polygones, ſo verſchwindet noch eins, alſo zuſammen zwei

Dreiecke, und es iſt alſo $(n-2)$ die Zahl der Dreiecke, welche ſich durch Diagonalen von einem Punkte aus, bilden laſſen. —

Auch wenn P außerhalb des Polygones genommen wird, ergiebt ſich der Flächenraum; nur umſtändlicher.

Zuſatz 3. Bezeichnet man den Flächenraum des Polygones mit P, ſo iſt nach dem Lehrſatze

$$P=(A+B+C+\ldots.)-n\pi+2\pi$$
$$=2\pi-(\pi-A)-(\pi-B)-(\pi-C)-\ldots..$$
$$=2\pi-(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots..);$$

alſo iſt der Flächenraum jedes Polygones, welches keine einwärts gehenden Winkel hat, kleiner als die halbe Kugelfläche.

Zuſatz 4. Da $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots.)$ den Perimeter des Polarpolygones ausmacht und nach Zuſ. 3. kleiner, als 2π iſt; ſo folgt, daß der Perimeter jedes ſphäriſchen Polygones kleiner als 2π, d. i. als ein Hauptkreis iſt.

§. 52.

Erklärung. Ein ſphäriſches Dreieck heißt ein **ſchiefes**, wenn der von der Spitze auf die Mitte der Grundſeite gezogene Bogen mit der Grundſeite ſchiefe Winkel bildet. Je mehr dieſer Bogen von dem durch die Mitte der Grundſeite ſenkrecht gehenden Bogen abweicht, deſto ſchiefer iſt das Dreieck.

Zuſatz 1. Errichtet man auf der Mitte der Grundſeite einen ſenkrechten Bogen, ſo iſt von den andern beiden Seiten des Dreieckes diejenige, welche jener ſenkrechte Bogen nicht trifft, die kleinere.

Denn iſt im Dreieck ABC (Figur 40.) DE dieſer ſenkrechte Bogen, der in F die Seite AC trifft, ſo iſt $CB < FB+FC$; aber $FB=FC$ (§. 38. Zuſ. 3.), daher $CB < AF+FC$, d. i. $CB < CA$.

Zuſatz 2. Umgekehrt: Die größere Seite wird ſtets von dem Perpendikel getroffen.

§. 53.

Lehrſatz. Wenn zwei ſphäriſche Dreiecke gleiche Grundſeite und gleichen Flächenraum haben, ſo hat das ſchiefere einen größern Umfang.

Beweis. Die Dreiecke (Figur 41.) ACB, ADB ſeyen ihrem Flächenraume nach gleich, ADB ſey das ſchiefere Dreieck und CB, DB die kleineren Seiten. Da $CB < CA$, ſo iſt Winkel $CAB < CBA$; um ſo mehr $OAB < OBA$; alſo $OB < OA$. Es ſey $OF = OB$, $OG = OD$, ſo iſt Dreieck $OGF = ODB$, wegen Gleichheit zweier Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel. Es kann aber G weder zwiſchen O und C, noch auf C ſelbſt fallen; denn in beiden Fällen würde $OGF < OCA$ ſeyn; da doch Dreieck $OCA = ODB$ ſeyn muß, weil $ACB - AOB = ADB - AOB$ iſt.

Schneidet nun GF in E die Seite AC, ſo iſt $AE < AF + FE$; $EC < EG + GC$; daher $AC < AF + FG + GC$. Addirt man zu dieſer Ungleichung die Gleichung $CB = CO + OF$, ſo folgt

$$AC + CB < AF + FG + GO + OF;$$

es iſt aber $GO = OD$; daher $AF + OF + GO = AD$; auch iſt $FG = DB$; folglich $AC + CB < AD + DB$.

Zuſatz. Unter den Dreiecken auf gleicher Grundſeite und von gleichem Flächenraume hat das gleichſchenkliche den kleinſten Umfang; denn jedes andere ſteht ſchiefer, als das gleichſchenkliche. (§. 40. Zuſ. 1.)

§. 54.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Dreiecken auf gleicher Grundſeite und von gleichem Umfange hat das ſchiefere den kleinern Flächenraum.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 41.) ABC, ABD ſey $AC + BC = AD + BD$ und ABD das ſchiefere Dreieck.

Daſſelbe kann nun nicht $=ABC$ ſeyn, weil nach vorigem Satze ABC einen kleinern Umfang als ABD haben müßte, was gegen die Vorausſetzung iſt. Eben ſo wenig kann $ABD > ABC$ ſeyn; denn wäre dies, ſo läßt ſich AH ſo ziehen, daß $ABH = ABC$ iſt. Dann würde $AH + HB > AC + CB$ ſeyn, und da $AH + HB < AD + DB$ iſt, ſo müßte um ſo mehr $AD + BD > AC + BC$ ſeyn, was mit der Vorausſetzung ſtreitet. Daher iſt $ADB < ACB$.

Zuſatz. Das gleichſchenkliche Dreieck iſt alſo das größte unter allen, die mit ihm gleiche Grundſeite und gleichen Umfang haben.

§. 55.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume iſt dasjenige, welches den kleinſten Umfang hat, gleichſeitig.

Beweis. Es ſey das ſphäriſche Polygon $ABCDE\ldots$ dasjenige, welches bei gegebenem Flächenraume den kleinſten Umfang hat. Wäre es nicht gleichſeitig, ſo folgen irgendwo zwei ungleiche Seiten auf einander. Solche ſeyen AB und BC. Denkt man ſich über AC ein Dreieck $AKC = ABC$ und ſo beſchrieben, daß $AK = KC$; ſo iſt $AK + KC < AB + BC$ (§. 53. Zuſ.) und der Umfang des Polygones $AKCDE\ldots$, welches $= ABCDE\ldots$ iſt, kleiner als der des letztern, was gegen die Vorausſetzung ſtreitet. Daher können nicht zwei ungleiche Seiten auf einander folgen und das Polygon mit dem kleinſten Umfange muß gleichſeitig ſeyn.

Zuſatz. Unter den Polygonen von gleichviel Seiten und von gleichem Umfange iſt dasjenige, welches den größten Flächenraum hat, ein gleichwinkliches. Denn wenn für den gegebenen Umfang $a + b + c + d + \ldots$) der Flächenraum ein Maximum iſt, ſo iſt es auch die Winkelſumme

$(A+B+C+D+\ldots)$. Im Polarpolygone iſt daher für die gegebene Winkelſumme $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\ldots)$, mithin für den gegebenen Flächenraum der Umfang $(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots)$ ein Minimum; alſo nach dem Lehrſatze das Polarpolygon ein gleichſeitiges. Iſt aber $\bar{A}=\bar{B}=\bar{C}$ u. ſ. w., ſo iſt $A=B=C=\ldots$; alſo unter den Polygonen von gleichem Umfange das größte ein gleichwinkliches.

§. 56.

Lehrſatz. Unter den Polygonen von gleich viel Seiten und von gleichem Umfange iſt das größte ein gleichſeitiges.

Beweis. Iſt das Polygon ABCDE... (Figur 42.) das größte, welches bei dem gegebenen Umfange und gegebener Seitenzahl möglich iſt, und es ſtießen irgendwo ungleiche Seiten zuſammen, etwa AB, BC; ſo ſey über der Grundſeite AC ein gleichſchenkliches Dreieck AKC beſchrieben, ſo daß $AK+KC=AB+BC$. Dann iſt nach §. 54. Zuſ. das Dreieck $AKC>ABC$, mithin das Polygon AKCDE..., welches gleiche Seitenzahl und gleichen Umfang mit ABCDE.... hat, größer als dieſes, gegen die Annahme. Folglich ABCDE.... gleichſeitig ſeyn.

Zuſatz 1. Unter den Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume iſt dasjenige, welches den kleinſten Umfang hat, ein gleichwinkliches.

Denn iſt bei gegebenem Flächenraume $(A+B+C+\ldots-(n-2)\pi)$ der Umfang $(a+b+c+\ldots)$ ein Minimum, ſo iſt in dem Polarpolygone bei gegebenem Umfange $(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots)$ der Flächenraum $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots-(n-2)\pi)$ ein Maximum, daſſelbe alſo dem Lehrſatze nach ein gleichſeitiges. Aus $\bar{A}=\bar{B}=\bar{C}=\ldots$ folgt dann $A=B=C=\ldots$

Zuſatz 2. Aus dem Lehrſatze und §. 55. Zuſ. folgt: Unter den ſphäriſchen Polygonen von gleich viel Seiten und

von gleichem Umfange iſt das größte ein gleichwinkliches und gleichſeitiges, alſo ein regelmäßiges.

Zuſatz 3. Aus §. 55. und §. 56. Zuſ. 1. ergiebt ſich: Unter den ſphäriſchen Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume iſt dasjenige, welches den kleinſten Umfang hat, ein regelmäßiges.

Von dem Nebenkreiſe.

§. 57.

Erklärung. Die ſphäriſche Sehne iſt derjenige innerhalb eines Nebenkreiſes liegende Bogen eines Hauptkreiſes, welcher zwei Punkte der Peripherie des Nebenkreiſes verbindet.

Die Sehne wird zum Durchmeſſer, wenn ſie durch den (ſphäriſchen) Mittelpunkt des Kreiſes geht.

Zur Sekante wird die Sehne, wenn ſie über die Peripherie des Nebenkreiſes hinaus geht, und die Sekante geht über in eine Tangente, wenn die beiden Durchſchnittspunkte derſelben in einen zuſammenfallen.

Die bei der ebenen Kreisfläche vorkommenden Begriffe des Segmentes oder Kreisabſchnittes, des Sektors oder Kreisausſchnittes gelten der Analogie gemäß auch bei der ſphäriſchen Kreisfläche; daher dieſe, ſo wie andere in der Planimetrie übliche Ausdrücke hier nicht weiter erklärt zu werden brauchen.

§. 58.

Lehrſatz. Die Gegenpunkte derjenigen Punkte, welche auf der Peripherie eines Nebenkreiſes liegen, bilden wieder einen Nebenkreis, deſſen Mittelpunkt der Gegenpunkt des Mittelpunktes, und deſſen (ſphäriſcher)

Radius gleich dem Radius des erſten Kreiſes iſt.

Beweis. Es ſey (Figur 43.) M der Mittelpunkt des Nebenkreiſes BAC und A ein beliebiger Punkt in der Peripherie deſſelben. Der Gegenpunkt von M ſey M′, der Gegenpunkt von A ſey A′; ſo ſind die Gegenbogen AM und A′M′ einander gleich.

Denkt man ſich nun A auf der Peripherie BAC fortrückend, ſo rückt auch A′ fort, und da in jeder Stellung AM $=$ A′M′, ſo bleibt A′ immer in gleicher Entfernung von M′; mithin liegen die Gegenpunkte der Peripherie ABC in einem Nebenkreiſe, dem die im Lehrſatze ausgeſprochenen Merkmale zukommen.

Anmerk. Solche Kreiſe nennen wir Gegenkreiſe.

Zuſatz 1. Jeder Punkt innerhalb des einen Kreiſes findet ſeinen Gegenpunkt innerhalb des Gegenkreiſes. Denn iſt α ein Punkt innerhalb des einen Kreiſes und M deſſen Mittelpunkt, und ſind α', M′, deren Gegenpunkte, ſo iſt der Bogen $M\alpha$ kleiner als der Radius, und da $M'\alpha' = M\alpha$, auch $M'\alpha'$ kleiner, als der Radius des Gegenkreiſes; alſo α' innerhalb des Gegenkreiſes.

Daher findet jede Figur innerhalb des einen Kreiſes ihre Gegenfigur innerhalb des Gegenkreiſes.

Zuſatz 2. Gegenkreiſe ſind Parallelkreiſe, deren Ebnen gleiche Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel haben. Denn da ſie gemeinſchaftliche Pole, alſo auch gemeinſchaftliche Achſe haben, auf welcher die Ebnen beider ſenkrecht ſtehen; ſo ſind ſie Parallelkreiſe. Gleichen Abſtand von dem Mittelpunkte der Kugel müſſen ſie aber haben, weil ungleiche Abſtände ungleiche Kreiſe geben würden. (§. 3. Zuſ. 1.)

Zuſatz 3. Legt man durch die Mittelpunkte M, M′ der Gegenkreiſe einen Hauptkreis MAA″M, der in A, A″ beide Kreiſe ſchneidet, ſo iſt $AA'' = \pi - 2MA$, und man kann AA′ die Entfernung der beiden Kreiſe von einander nennen.

Je gröſſer die Radien MA, M'A', ſind, deſto kleiner iſt die Entfernung AA''. Gehen die Nebenkreiſe in Hauptkreiſe über, ſo verſchwindet AA'' und beide Gegenkreiſe fallen zuſammen in einen Hauptkreis. Der Hauptkreis iſt alſo ſein eigener Gegenkreis.

Zuſatz 4. Umgekehrt: Haben zwei Nebenkreiſe gleiche Radien und ſind ihre Mittelpunkte Gegenpunkte, ſo ſind ſie Gegenkreiſe. (§. 6. Zuſ. 3.)

§. 59.

Lehrſatz. Wird ein Nebenkreis von einem Hauptkreiſe in zwei Punkten geſchnitten, ſo wird auch deſſen Gegenkreis von demſelben Hauptkreiſe in zwei Punkten, und zwar in den Gegenpunkten der erſtern geſchnitten; wird aber der erſtere Nebenkreis von dem Hauptkreiſe nur in einem Punkte berührt, ſo wird es auch der Gegenkreis, und zwar am Gegenpunkte jenes Berührungspunktes.

Beweis. Wird der erſte Nebenkreis von dem Hauptkreiſe in den Punkten α, β geſchnitten, ſo liegen die Gegenpunkte α', β' derſelben ſowohl in dem Gegenkreiſe, als in dem Hauptkreiſe (§. 4. Zuſ. 2.); mithin ſchneidet der Hauptkreis auch den Gegenkreis in den Punkten α', β', den Gegenpunkten von α, β.

Berührt aber der Hauptkreis den erſten Nebenkreis nur in einem Punkte α, ſo liegt deſſen Gegenpunkt α' ſowohl im Gegenkreiſe, als im Berührungskreiſe. Einen zweiten Punkt kann letzterer mit dem Gegenkreiſe nicht gemein haben, weil er ſonſt nach dem Bewieſenen auch mit dem erſteren Nebenkreiſe zwei Punkte gemein haben müßte.

Folglich berührt er blos den Gegenkreis, und zwar im Gegenpunkte des erſteren Berührungspunktes.

Zuſatz 1. Trifft ein Hauptkreis einen Nebenkreis gar nicht, ſo trifft er auch deſſen Gegenkreis nicht.

Zuſatz 2. Die Segmente, welche ein Hauptkreis von zwei Gegenkreiſen abſchneidet, ſind Gegenſegmente auf gleichen Sehnen.

§. 60.

Lehrſatz. In jedem Nebenkreiſe ſtehen gleiche Winkel am Mittelpunkte auf gleichen Sehnen und auf gleichen Bogen, und bilden gleiche Kreisausſchnitte.

Beweis. Es ſey (Figur 44.) der Winkel AMB= A'MB', wo M der Mittelpunkt des Kreiſes AB, A'B' iſt. Man denke ſich den Ausſchnitt A'MB' ſo auf AMB gelegt, daß A'M auf AM fällt, ſo fällt auch B'M auf BM und B' auf B, wie A' auf A; mithin deckt ſich die Sehne A'B' mit AB.

Auch der Nebenbogen A'B' fällt ganz auf den Nebenbogen AB, weil ungleiche Radien da ſeyn müßten, wenn der eine von dem andern abwiche.

Daher decken auch die Ausſchnitte ſich.

Zuſatz 1. Auf gleichen Sehnen ſtehen gleiche Winkel am Mittelpunkte; denn die Dreiecke MAB, MA'B' ſind allen Seiten nach gleich, wenn A'B'=AB, und alſo die Winkel AMB, A'MB' einander gleich.

Daher ſind durch gleiche Sehnen auch gleiche Bogen, gleiche Ausſchnitte — auch gleiche Kreisabſchnitte — bedingt.

Zuſatz 2. Durch gleiche Bogen AB, A'B' eines Nebenkreiſes ſind gleiche Winkel am Mittelpunkte, gleiche Sehnen u. ſ. w. bedingt. Denn es läßt ſich, wie vorhin, die Deckung der genannten Bogen nachweiſen, aus der das Uebrige folgt.

Zuſatz 3. Von den beiden Abſchnitten, in welche die ſphäriſche Fläche des Nebenkreiſes durch eine Sehne zerlegt

wird, iſt derjenige der größere, in welchem der Mittelpunkt des Kreiſes liegt; und umgekehrt.

Zuſatz 4. Die Gleichheit der zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte, oder zu gleichen Sehnen, oder zu gleichen Nebenbogen gehörigen übrigen, vorher genannten, Stücke gilt auch, wenn ſie nicht in einem und demſelben Kreiſe, ſondern in verſchiedenen, jedoch gleichen Kreiſen liegen. Denn es läßt ſich nicht nur die Deckung ſolcher Kreiſe ſelbſt, ſondern auch ihrer Bogen, Sehnen, Abſchnitte u. ſ. w. unter der genannten Bedingung nachweiſen.

Zuſatz 5. Gegenſegmente (§. 59. Zuſ. 2.) haben gleichen Flächenraum.

Hieraus läßt ſich die Gleichheit zweier Gegendreiecke ihrem Flächenraume nach ableiten. Denn ſie laſſen ſich in Gegenkreiſen konſtruiren, — liegen alſo immer in (ſo wie auch um) Gegenkreiſen, — und ihre Seiten ſchneiden von den gleichen Gegenkreiſen gleiche Segmente ab.

§. 61.

Lehrſatz. Das Perpendikel vom Mittelpunkte des Nebenkreiſes auf eine Sehne desſelben halbirt dieſe.

Beweis. Steht der Bogen MD (Figur 45.) ſenkrecht auf der Sehne AB, ſo ſind die rechtwinklichen Dreiecke MDA, MDB gleich, weil MA = MB; MD = MD, (§. 29. Zuſ.); daher iſt AD = DB.

Zuſatz 1. Der vom Mittelpunkte des Kreiſes nach dem Mittelpunkte einer Sehne gehende Bogen ſteht auf der Sehne ſenkrecht. Denn dann ſind die Dreiecke MDA, MDB wegen Gleichheit dreier Seiten, gleich, und dieſer Winkel MDA = MDB.

Zuſatz 2. Der durch die Mitte einer Sehne ſenkrecht gehende Bogen geht durch den Mittelpunkt des Kreiſes. Denn ginge ein anderer Bogen vom Mittelpunkte des Kreiſes nach dem Mittelpunkte der Sehne, ſo würden nach

Zuſ. 1. zwei Perpendikel in demſelben Punkte ſtehen, was nicht möglich iſt. (§. 10. Zuſ.)

Zuſatz 3. Der Mittelpunkt des Kreiſes iſt der Durchſchnitt der in den Mittelpunkten zweier Sehnen ſenkrecht ſtehenden Bogen.

Zuſatz 4. Verlängert man das Perpendikel MD über M hinaus, ſo geht es durch den Pol der Sehne AB (§. 8. Zuſ. 4.); und umgekehrt: wenn durch den Pol einer Sehne und durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes ein Bogen geht, ſo trifft er die Mitte der Sehne; ferner: wenn ein Bogen durch die Mitte der Sehne und durch ihren Pol geht, ſo geht er durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes. Alſo liegen der Mittelpunkt der Sehne, der Mittelpunkt des Nebenkreiſes und der Pol der Sehne immer in einem und demſelben Hauptkreiſe.

Anmerk. Dies folgt auch unmittelbar aus §. 9., wenn man um D als Pol mit dem Radius DA (=DB) einen Kreis beſchreibt.

Zuſatz 5. Die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere Sehne iſt die größere. Denn iſt das auf eine zweite Sehne FG gefällte Perpendikel MH kleiner als MD, ſo iſt in den rechtwinklichen Dreiecken MDA, MHF die Kathete HF größer als AD (§. 38. Zuſ. 7.), alſo, von den Hälften auf die Ganzen geſchloſſen, auch FG > AB. — Der Durchmeſſer iſt alſo größer als jede Sehne.

Zuſatz 6. Umgekehrt: Die größere Sehne iſt die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere. Denn aus FG > AB folgt FH > AD und hieraus wie vorhin HM < MD.

Zuſatz 7. Gleiche Sehnen haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte des Kreiſes; und umgekehrt.

§. 62.

Erklärung. Was unter der ſphäriſchen Sekante zu verſtehen ſey, iſt oben (§. 57.) angedeutet. Hier wollen wir

für das Folgende noch hinzufügen, daß bei mehrern von einem Punkte außerhalb des Nebenkreiſes ausgehenden Sekanten, wie Figur 46. AC, AD, jede von jenem Punkte bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte mit dem Kreiſe genommen wird. Die Stücke derſelben bis zum erſten Durchſchnitte, wie AC′, AD′ heißen die äußeren, die andern (Sehnen), wie C′C, D′D, die innern Abſchnitte der Sekanten.

Zuſatz 1. Zieht man von dem gemeinſchaftlichen Ausgangspunkte A der Sekanten durch den Mittelpunkt M des Kreiſes die Sekante AB, ſo iſt unter den übrigen Sekanten die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere zugleich die jener durch den Mittelpunkt gehenden näher liegende, d. h. ſie bildet einen kleinern Winkel mit derſelben. Denn fällt man auf die Sekanten AC, AG die Perpendikel ME, MF, von denen ME < MF iſt; ſo iſt auch Winkel MAE < MAF. (§. 38. Zuſ. 10.)

Umgekehrt iſt die der durch den Mittelpunkt gehenden nähere auch dem Mittelpunkte des Kreiſes näher. (§. 38. Zuſ. 11.)

Zuſatz 2. Zwei Sekanten ſchneiden ſich innerhalb des Kreiſes, wenn ihr gemeinſchaftlicher Ausgangspunkt innerhalb des Gegenkreiſes liegt; liegt dieſer aber nicht im Gegenkreiſe, ſo können ſich die Sekanten nicht innerhalb des vorliegenden Kreiſes ſchneiden.

§. 63.

Lehrſatz. Wenn nach einem Nebenkreiſe von einem Punkte aus, der nicht in dem Gegenkreiſe liegt, Sekanten gezogen ſind, ſo iſt die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere die größere.

Beweis. Es ſeyen (Figur 46.) AC, AD zwei Sekanten, von denen AC dem Mittelpunkte M näher liegt, weil Winkel BAC < BAD. Zieht man die Radien MC,

MD; ſo iſt in den Dreiecken AMC, AMD Seite $AM = AM$; $MC = MD$; aber Winkel $AMC > AMD$; daher $AC > AD$. (§. 31.)

Liegen die beiden Sekanten auf verſchiedenen Seiten von AB, wie AC und AG; ſo mache man Winkel $BAD = BAG$. Dann ſind die Dreiecke AMD, AMG einander gleich, weil $AM = AM$; $MD = MG$ und Winkel $MAD = MAG$, und weil die hier mögliche Zweideutigkeit durch die Figur entſchieden wird. (§. 41. Zuſ. 1.) Es iſt alſo $AG = AD$; daher dem Bewieſenen gemäß $AG < AC$.

Zuſatz 1. Die durch den Mittelpunkt gehende Sekante AB iſt alſo die größte unter allen.

Zuſatz 2. Verlängert man die Sekanten bis zum zweiten gemeinſchaftlichen Durchſchnitte A', dem Gegenpunkte von A, ſo iſt auch von da aus $A'C' > A'D'$ und $A'G'$; $A'B'$ aber die größte. Daraus folgt: $AC' < AD'$ und AG'; AB' aber am kleinſten. In Worten: Von den äußeren Abſchnitten der von einem Punkte, der nicht im Gegenkreiſe liegt, ausgehenden Sekanten iſt der zur größeren gehörige der kleinere; der zur größten gehörige der kleinſte.

Für dieſe äußern Abſchnitte gilt der Satz jedoch auch, wenn der gemeinſchaftliche Ausgangspunkt innerhalb oder auf der Peripherie des Gegenkreiſes liegt. Der Beweis hiefür iſt dem im Lehrſatze gegebenen ganz ähnlich. —

Die Grenze dieſer äußeren Abſchnitte, wie der ganzen Sekanten, iſt die Tangente — die äußerſte Sekante, deren Durchſchnitte zuſammenfallen. Die Tangente iſt alſo größer als jeder äußere Abſchnitt; doch kleiner als jede Sekante.

Zuſatz 3. Die vom Mittelpunkte des Kreiſes gleich weit entfernten Sekanten (wie AD, AG) ſind einander gleich, daher auch ihre äußern Abſchnitte.

Zuſatz 4. Die Differenz der äußern Abſchnitte zweier Sekanten, die von einem Punkte ausgehen, iſt kleiner, als die Differenz der innern. Denn es iſt $AC' + C'C > AD' + D'D$; daher $C'C - D'D > AD' - AC'$.

Zuſatz 5. Der Bogen AB′, als der kürzeſte unter allen, welche von A nach dem Nebenkreiſe gezogen werden können, heißt die Entfernung des Punktes von dem Kreiſe; vergl. §. 38. Zuſ. 3.

Zuſatz 6. Von zwei Gegenpunkten der Kugelfläche iſt immer einer um weniger, als einen Quadranten von einem Nebenkreiſe entfernt. Denn man lege durch die Gegenpunkte (Figur 47.) A, A′ und durch den Mittelpunkt M des Kreiſes einen Hauptkreis, der in B, B′ den Nebenkreis ſchneidet und es ſey $AB \geqq \frac{\pi}{2}$; dann iſt $A'B \leqq \frac{\pi}{2}$; alſo jedenfalls $A'B' < \frac{\pi}{2}$.

§. 64.

Lehrſatz. Unter den Bogen, welche von einem innerhalb des Nebenkreiſes liegenden Punkte aus nach der Peripherie deſſelben gehen, iſt der durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehende der größte; die Verlängerung deſſelben rückwärts bis zum entgegengeſetzten Punkte der Peripherie iſt der kürzeſte; von den übrigen Bogen iſt der dem größten nähere (d. h. einen kleinern Winkel mit demſelben bildende) der größere.

Beweis. Es ſey (Figur 48.) A der Punkt, von welchem die Bogen AB, AE, AD u. ſ. w. gezogen ſind, unter denen AB durch den Mittelpunkt M des Kreiſes geht.

1) Es iſt nun $AM + ME > AE$; folglich, da $AB = AM + MB = AM + ME$ iſt, auch $AB > AE$. Alſo iſt AB der größte Bogen.
2) Da $AM + AC > MC$, und $MC = MB' = AM + AB'$ iſt, ſo iſt $AM + AC > AM + AB'$; folglich $AB' < AC$; alſo AB′ der kleinſte Bogen.

3) Da der Winkel MED = MDE iſt, ſo iſt AED < ADE; folglich AE > AD; alſo der dem größten AB nähere Bogen der größere.

4) Macht man auf der andern Seite des Durchmeſſers BB′ den Winkel BAC′ = BAD; ſo iſt das Dreieck AMC′ = AMD (§. 29.); daher AC′ = AD; alſo das in 3) Erwieſene auch gültig, wenn die Bogen nicht auf einer Seite des Durchmeſſers liegen; mithin die Behauptung evident.

Zuſatz 1. Zu beiden Seiten des größten und des kleinſten Bogens in gleichen Entfernungen von denſelben ſind die Bogen gleich.

Zuſatz 2. Wenn bei zwei ſich ſchneidenden Sehnen ein Abſchnitt der einen größer iſt, als ein Abſchnitt der andern; ſo iſt der zweite Abſchnitt der erſten kleiner, als der zweite Abſchnitt der andern Sehne. Denn verlängert man AC′ nach C und AE nach E′, und BAE iſt < BAC′, ſo iſt AE > AC′; zugleich iſt dann auch B′AE′ < B′AC; alſo AE′ < AC.

Zuſatz 3. Sind aber die beiden erſten Abſchnitte der Sehnen ſich gleich, ſo ſind es auch die andern beiden.

Zuſatz 4. Iſt die Sehne FF′ ſenkrecht auf BB′, ſo iſt AE′ = AE. Da die Abſchnitte jeder andern durch A gehenden Sehne ungleiche Winkel mit AB machen, ſo ſind ſie ungleich. Zwei Sehnen können ſich alſo nicht beide zugleich halbiren.

Zuſatz 5. Fällt man die Perpendikel Mn, Mp auf die Sehnen EE′, CC′, ſo iſt Mn < Mp, weil der Winkel MAn < MAp iſt. Die Abſchnitte AE′, AC, auf welche die Perpendikel nicht fallen, ſind alſo die kleineren.

Daher läßt der zweite und dritte Zuſatz ſich ſo ausdrücken: Der kleinere Abſchnitt der größern Sehne iſt kleiner, als der der kleinern Sehne. Bei gleichen Sehnen aber ſind jene Abſchnitte gleich. (Vergl. §. 63. Zuſ. 2. 3.)

Zuſatz 6. Liegt der gemeinſchaftliche Ausgangspunkt

zweier Sekanten innerhalb des Gegenkreiſes (§. 62. Zuſ. 2.), ſo beſteht jede Sekante aus einem halben Hauptkreiſe und einem Sehnenabſchnitte. Je nachdem nun dieſe Sehnenabſchnitte die größeren oder kleineren ſind, iſt die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere Sekante die größere oder die kleinere. Erſteres findet ſtatt, wenn der gemeinſchaftliche Ausgangspunkt der Sekanten jenſeit des Mittelpunkts des Gegenkreiſes liegt; letzteres, wenn er dieſſeit deſſelben liegt. — Liegt er auf den Grenzen, nämlich auf dem Mittelpunkte des Gegenkreiſes, oder auf deſſen Peripherie; ſo ſind alle Sekanten gleich.

§. 65.

Lehrſatz. Wenn von dem Mittelpunkte eines Nebenkreiſes ein Radius nach irgend einem Punkte der Peripherie geht und in dem Endpunkte deſſelben ein Hauptbogen ſenkrecht auf dem Radius errichtet wird; ſo iſt dieſer Hauptbogen eine (ſphäriſche) Tangente des Nebenkreiſes.

Beweis. Steht der Hauptbogen BC (Figur 49.) in A ſenkrecht auf dem Radius MA, ſo iſt MA der kürzeſte Bogen von M nach BC. (§. 38., §. 8. Anmerk.) Daher ſind alle übrigen Punkte in BC um mehr, als den Radius MA von dem Mittelpunkte M entfernt, liegen alſo außerhalb des Nebenkreiſes. Folglich berührt BC nur in dem Punkte A den Nebenkreis.

Zuſatz 1. Umgekehrt: Jede Tangente ſteht ſenkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte gehenden Radius. Denn iſt A der Berührungspunkt der Tangente BC, ſo iſt MA der kürzeſte Bogen unter allen, welche von M nach BC gehen; wäre nun MA nicht ſenkrecht auf BC, ſo würde ein anderer Bogen ſenkrecht und kürzer, als MA ſeyn; was nicht möglich iſt.

Zuſatz 2. In einem und demſelben Punkte der Peri-

ſphäre eines Nebenkreiſes iſt nur eine Tangente an denſelben möglich; denn eine zweite Tangente müßte ebenfalls auf demſelben Radius und in demſelben Punkte ſenkrecht ſtehen; was nicht möglich iſt.

Zuſatz 3. Der auf eine Tangente im Berührungspunkte ſenkrechte Hauptbogen geht durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes; denn ſonſt würde der Radius nach dem Berührungspunkte wieder ein zweites Perpendikel ſeyn.

Zuſatz 4. Das von dem Mittelpunkte des Kreiſes auf die Tangente gefällte Perpendikel trifft ſie im Berührungspunkte. Denn wäre dies nicht, ſo würde der Radius nach dem Berührungspunkte ein zweites Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Tangente ſeyn.

Zuſatz 5. Verlängert man den Radius AM über M hinaus, ſo geht er durch den Pol der Tangente. Aus den Zuſätzen 1., 3. und 4. folgt: Der Berührungspunkt, der Pol der Tangente und der Mittelpunkt des Kreiſes liegen immer in einem und demſelben Hauptkreiſe.

Anmerk. Unter dem Pole einer Tangente iſt von den beiden Polen des berührenden Hauptkreiſes derjenige gemeint, welcher auf der Seite des berührten Nebenkreiſes liegt, oder: welcher dem Mittelpunkte des Nebenkreiſes der nächſte iſt. Er wird gefunden, wie in Zuſ. 5. angedeutet iſt.

§. 66.

Lehrſatz. Die Pole aller Tangenten eines Nebenkreiſes liegen wieder in einem Nebenkreiſe, der mit jenem Kreiſe gemeinſchaftlichen Mittelpunkt hat und deſſen Radius das Komplement des Radius jenes Kreiſes iſt.

Beweis. Es ſey (Figur 49.) A der Berührungspunkt der Tangente BC und von A durch den Mittelpunkt M des Kreiſes der Quadrant AP gezogen; ſo iſt P der Pol der

Tangente, deſſen Entfernung vom Mittelpunkte der Bogen $PM = \left(\frac{\pi}{2} - AM\right)$ iſt. Da der Pol jeder andern Tangente auch um $\left(\frac{\pi}{2} - AM\right)$ von M abſteht; ſo ſind alle Tangentenpole gleich weit von M entfernt; liegen alſo in einem Nebenkreiſe, deſſen Radius $= \frac{\pi}{2} - AM$, alſo das Komplement AM iſt.

Zuſatz 1. Inſofern das Element des Nebenkreiſes, welches derſelbe mit der Tangente gemein hat, als Theil eines Hauptkreiſes betrachtet werden kann, iſt der Pol der Tangente auch der Pol dieſes Elementes. Sonach hat jedes Element eines Nebenkreiſes ſeinen Pol und die Pole aller Elemente liegen in einem Nebenkreiſe von den im Lehrſatze ausgeſprochenen Eigenſchaften. Wir nennen dieſen Kreis den Polarkreis jenes Kreiſes.

Zuſatz 2. Iſt r der (ſphäriſche) Radius eines Nebenkreiſes und r′ der ſeines Polarkreiſes, ſo iſt $r + r' = \frac{\pi}{2}$. Je größer r iſt, deſto kleiner iſt r′; iſt $r = \frac{\pi}{2}$; ſo verſchwindet r′. Der Polarkreis des Hauptkreiſes geht alſo in einen Punkt, den Pol deſſelben, zuſammen.

Zuſatz 3. Auch bei Kreiſen iſt die Polarität gegenſeitig, d. h. iſt ein Kreis der Polarkreis eines andern, ſo iſt auch letzterer der Polarkreis des erſteren.

Zuſatz 4. Die Polarkreiſe zweier Gegenkreiſe ſind ſelbſt wieder Gegenkreiſe.

Zuſatz 5. In dem Gegenkreiſe eines Polarkreiſes liegen die zweiten (negativen) Pole der Tangenten. Daher hat jeder Nebenkreis zwei Polarkreiſe, die man als poſitive und negative unterſcheiden kann.

Zuſatz 6. Jeder Hauptkreis, deſſen Pol auf der Pe-

ripherie des Polarkreiſes liegt, iſt eine Tangente des andern Kreiſes.

§. 67.

Aufgabe. An einen gegebenen Nebenkreis eine Tangente zu ziehen, welche durch einen gegebenen Punkt der Kugelfläche geht.

Auflöſung. Es ſey (Figur 50.) cbd der gegebene Kreis und O der gegebene Punkt, durch welchen die Tangente gehen ſoll. Man konſtruire den Polarkreis DAC des gegebenen; beſchreibe um O als Pol einen Hauptkreis BAB', der in A und B den Polarkreis ſchneide; um A ſowohl, als B beſchreibe man einen Hauptkreis; ſo iſt jeder eine Tangente von der geforderten Eigenſchaft.

Beweis. Da der Durchſchnittspunkt A auf der Peripherie des Polarkreiſes liegt, ſo iſt der um A beſchriebene Hauptkreis eine Tangente an cbd; und da A von O um einen Quadranten entfernt iſt (indem O der Pol des durch A gehenden Hauptkreiſes iſt), ſo geht die Tangente durch O. — Ebenſo läßt ſich für B die Richtigkeit der Auflöſung beweiſen.

Zuſatz 1. Die Berührungspunkte beider Tangenten werden gefunden, wenn von den Polen A, B durch den Mittelpunkt M Bogen geführt werden, deren Durchſchnitte a, b mit dem gegebenen Kreiſe bezüglich die Berührungspunkte ſind.

Zuſatz 2. An einen gegebenen Nebenkreis läßt ſich von jedem Punkte der Kugelfläche, der weder in dem Kreiſe ſelbſt noch in ſeinem Gegenkreiſe liegt, eine Tangente ziehen. Denn die Möglichkeit der Tangente hängt von der Möglichkeit der Durchſchnittspunkte A, B ab. Legt man nun durch M und den gegebenen Punkt O einen Hauptkreis, der in b' den Gegenkreis c'b'd' des gegebenen Kreiſes cbd ſchneidet, den Polarkreis CBD aber in E trifft; ſo iſt der Bogen

$Eb' = \frac{\pi}{2}$, weil $ME + M'b' = ME + Mb = \frac{\pi}{2}$ iſt. (§. 66. Zuſ. 2.) Liegt alſo O nicht innerhalb des Gegenkreiſes c'b'd', ſondern außerhalb; ſo iſt $OE < \frac{\pi}{2}$; und es ſchneidet der um O beſchriebene Hauptkreis den Polarkreis. Liegt aber O in b', ſo berührt der um O beſchriebene Hauptkreis den Polarkreis in E; giebt alſo doch einen Tangentenpol.

Daß keine Tangente möglich iſt, wenn O innerhalb des Gegenkreiſes liegt, folgt aus §. 59.

Zuſatz 3. Die Bogen zweier von einem Punkte nach einem Kreiſe gehender Tangenten, welche zwiſchen dem gemeinſchaftlichen Ausgangspunkte und den Berührungspunkten enthalten ſind, ſind gleich.

Denn die Bogen Ob, Oa ſind einander gleich, weil die an b, a rechtwinklichen Dreiecke MbO, MaO nach §. 29. Zuſ. gleich ſind.

Zuſatz 4. Daher halbirt auch der vom Mittelpunkte des Kreiſes nach dem Durchſchnitte der beiden Tangenten gezogene Bogen (MO) den Winkel der Tangenten.

§. 68.

Aufgabe. An zwei gegebene Kreiſe auf der Kugelfläche eine Tangente zu ziehen.

Auflöſung. Es ſeyen (Figur 51.) ABC und DEF die gegebenen Kreiſe und M, N ihre Mittelpunkte. Man beſchreibe ihre Polarkreiſe abc, dbe, welche ſich in b ſchneiden. Um b als Pol beſchreibe man einen Hauptkreis, ſo berührt dieſer beide Kreiſe.

Beweis. Da jeder Hauptkreis, deſſen Pol auf der Peripherie des Polarkreiſes liegt, den andern Kreis berührt; ſo iſt die Richtigkeit der Auflöſung evident.

Zuſatz 1. Der zweite Durchſchnitt der beiden Polarkreiſe giebt eine zweite, und die beiden Durchſchnitte des

Polarkreiſes dbe mit dem negativen Polarkreiſe a'b'c' geben noch eine dritte und vierte Tangente an beide gegebene Kreiſe. Die erſten beiden Tangenten ſind ſo beſchaffen, daß die gegebenen Kreiſe beide auf einer und derſelben Seite des berührenden Hauptkreiſes liegen; die letzten beiden aber gehen zwiſchen den gegebenen Kreiſen durch. Letzteres folgt aus dem Erſteren; denn liegen die Kreiſe ABC, DEF innerhalb eines jeden der erſten beiden Berührungskreiſe; ſo liegt der Gegenkreis A'B'C' mit DEF innerhalb der andern beiden; weil a'b'c' der poſitive Polarkreis für A'B'C' iſt. Daher muß jede der letzteren Tangenten die Kreiſe DEF, ABC von einander ſcheiden.

Zuſatz 2. Je nachdem ſich die poſitiven Polarkreiſe nur berühren oder ſich gar nicht treffen, iſt von den erſten beiden Tangenten nur eine möglich, oder gar keine. Eben das gilt von den ungleichartigen Polarkreiſen.

Zuſatz 3. Die beiden negativen Polarkreiſe geben dieſelben Tangenten, wie die poſitiven; denn die Durchſchnitte der erſteren ſind die Gegenpunkte der Durchſchnitte der letztern. — So giebt auch der negative Polarkreis von DEF mit dem poſitiven von ABC die dritte und vierte Tangente wieder.

So giebt es alſo im Allgemeinen vier Tangenten an zwei Nebenkreiſe, und nur vier, von denen indeß in beſonderen Fällen nur eine, zwei, oder drei möglich ſeyn können.

Zuſatz 4. Bezeichnet man die Radien der Kreiſe ABC, DEF mit r, r'; die ihrer Polarkreiſe mit ϱ, ϱ'; die Entfernung MN ihrer Mittelpunkte mit d; ſo muß, wenn die poſitiven Polarkreiſe ſich treffen ſollen, $\varrho+\varrho' \geqq d$ ſeyn. Setzt man für ϱ, ϱ' ihre Werthe $\frac{\pi}{2}-r$; $\frac{\pi}{2}-r'$; ſo iſt jene Bedingungsgleichung $r+r'+d \leqq \pi$; oder $r+r' \leqq \bar{d}$.

Für die Polarkreiſe dbe und a'b'c' iſt M' für M, alſo

$\bar{d}$ für d zu ſetzen; daher iſt die Bedingung für die Möglichkeit der dritten und vierten Tangente die Gleichung $r + r' \leqq d$. In beiden Gleichungen deutet das Zeichen $<$ zwei, das Zeichen $=$ eine Tangente an.

§. 69.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis eine Tangente ſo zu führen, daß ſie mit einem zweiten gegebenen Kreiſe einen Winkel von gegebener Größe bilde.

Auflöſung. Es ſey (Figur 52.) ABC der gegebene Kreis, an welchen die Tangente zu führen iſt; der Winkel, welchen ſie mit dem zweiten gegebenen Kreiſe DEF bilden ſoll, ſey $= w$.

Man konſtruire den Polarkreis abc des erſten Kreiſes; beſchreibe um den Mittelpunkt N des zweiten mit dem Radius $= (\pi - w)$ einen Kreis dbe, der in b den Polarkreis treffe und beſchreibe endlich um b als Pol einen Hauptkreis; ſo genügt dieſer der Aufgabe.

Eine zweite Tangente giebt der zweite Durchſchnitt der Kreiſe abc und dbe.

Beweis. Da der Winkel zweier Kreiſe das Supplement ihres Polabſtandes iſt und b von N um $(\pi - w)$ abſteht, ſo bildet der um b beſchriebene Hauptkreis mit DEF einen Winkel $= w$ und berührt den Kreis ABC, weil ſein Pol in deſſen Polarkreiſe liegt.

Zuſatz 1. Die Durchſchnitte des Kreiſes dbe mit dem negativen Polarkreiſe geben wieder eine dritte und eine vierte Tangente, welche beide der Aufgabe genügen und ſich von den beiden erſteren dadurch unterſcheiden, daß jede der letzteren den Kreis ABC von dem andern Kreiſe DEF, oder einem Theile deſſelben trennt, oder doch im Allgemeinen trennen kann; während jede der erſteren Tangenten den erſten

Kreis mit dem zweiten, oder doch mit einem Theile deſſelben einſchließt oder doch im Allgemeinen einſchließen kann.

Zuſatz 2. Iſt e'b''d' der Gegenkreis von ebd, ſo geben deſſen Durchſchnitte mit den beiden Polarkreiſen abc, a'b'c' vier Tangenten an ABC, welche aber mit DEF den Winkel $=(\pi-w)$ bilden. Der Nebenwinkel deſſelben iſt $=w$; daſſelbe liegt aber nach der entgegengeſetzten Richtung, wie der in der Auflöſung gemeinte.

§. 70.

Lehrſatz. Je nachdem der Durchſchnitt zweier Sehnen außerhalb des Kreiſes, oder auf der Peripherie oder innerhalb deſſelben liegt, muß der ihre Pole verbindende Bogen den Polarkreis ſchneiden, oder nur berühren, oder ganz außerhalb deſſelben liegen.

Anmerk. Unter dem Durchſchnitte der Sehnen iſt hier von den beiden Gegenpunkten, in welchen ſich die Hauptkreiſe der Sehnen ſchneiden, der dem Nebenkreiſe nächſte gemeint, der jedenfalls um weniger, als einen Quadranten von demſelben abſteht. (§. 63. Zuſ. 6.)

Beweis. 1) Es ſey (Figur 53.) der Durchſchnitt der Sehnen AB, A'B' außerhalb des Kreiſes in C und die Pole der Sehnen ſeyen P, P'. Da der Durchſchnitt zweier Hauptkreiſe der Pol des durch ihre Pole gehenden Hauptkreiſes iſt (§. 9. Zuſ.); ſo iſt C der Pol des Bogens PP'. Zieht man von C durch den Mittelpunkt M einen Bogen, der zunächſt in D den Kreis ABB'A' ſchneidet, den Polarkreis aber in F trifft; ſo iſt $DF=\frac{\pi}{2}$, alſo $CF>\frac{\pi}{2}$. Es liegt alſo zwiſchen F und C ein Punkt E, der von C um einen Quadranten entfernt iſt, und der in dem durch P, P' gehenden um C als Pol beſchriebenen Hauptkreiſe liegt. Iſt dies aber, ſo ſchneidet der Bogen PP' den Polarkreis.

2) Liegt der Durchſchnitt der Sehnen auf der Peripherie, wie bei AD, A'D; ſo iſt $DF=\frac{\pi}{2}$; der Bogen PP' geht alſo durch F. Da aber jeder andere von D nach der Peripherie des Polarkreiſes gehende Bogen kleiner als DF, alſo kleiner als ein Quadrant iſt (§. 64.), während alle Punkte des Bogens PP' um $\frac{\pi}{2}$ von D entfernt ſind; ſo berührt PP' den Polarkreis blos in F.

3) Liegt der Durchſchnitt der Sehnen innerhalb des Kreiſes, wie bei den Sehnen AG, A'G', die ſich in C' ſchneiden; ſo iſt $C'F<\frac{\pi}{2}$. Der um C' als Pol beſchriebene Hauptkreis kann alſo den Polarkreis gar nicht treffen, da der um D beſchriebene ihn nur berührte.

Zuſatz. Die Richtigkeit der Umkehrung des Lehrſatzes iſt evident.

§. 71.

Lehrſatz. Iſt ein ſphäriſches Polygon um einen Nebenkreis beſchrieben, ſo iſt das Polarpolygon ein in den Polarkreis beſchriebenes.

Beweis. Es ſey (Figur 54.) ABCD.... ein Polygon um den Kreis abc....., den es in den Punkten a, b, c,.... berührt; der Polarkreis ſey a'b'A'B'.. Zieht man von den Berührungspunkten a, b, c,.... durch den Mittelpunkt M der Kreiſe Bogen bis zu ihren zweiten Durchſchnitten A', B', C',.. mit dem Polarkreiſe, ſo ſind A', B', C'.... die Pole der Tangenten AB, BC, CD...... Verbindet man nun dieſe Pole durch Sehnen A'B', B'C'....., ſo iſt A'B'C'.... das Polarpolygon von ABCD... und ein in den Polarkreis eingeſchriebenes.

Zuſatz. Iſt umgekehrt ein ſphäriſches Polygon in ei-

nen Kreis beſchrieben, ſo iſt ſein Polarpolygon um den Polarkreis beſchrieben. Denn iſt A'B'C'.... in den Kreis a'b'c'A'.... eingeſchrieben, ſo geben die Pole B, C,.... der Sehnen A'B', B'C'..... lauter Tangenten in den Polarkreis ABCD.... (§. 70.); alſo ein um den Polarkreis beſchriebenes Polygon, welches das Polarpolygon des vorigen iſt.

§. 72.

Lehrſatz. Iſt ein ſphäriſches Polygon ein regelmäßiges, ſo läßt ſich ein Nebenkreis, ſowohl um, als in daſſelbe beſchreiben.

Beweis. Es ſey (Figur 55.) ABCD.... ein regelmäßiges Polygon, d. h. AB=BC=CD....., und Winkel A=B=C=..... Man halbire die Seiten deſſelben in a, b, c,.... und errichte in a und b Perpendikel auf AB und BC, deren Durchſchnitt M ſey. Von M aus ziehe man nach den übrigen Halbirungspunkten c, d...., desgleichen nach allen Winkelſpitzen B, C, D..... Bogen.

Da ſind nun

1) die an a, b rechtwinklichen Dreiecke MaB, MbB einander gleich, weil aB=bB und MB=MB; folglich $Ma=Mb$; $b'=b''=\frac{1}{2}B$.

2) Die an b rechtwinklichen Dreiecke MbB, MbC ſind einander gleich, weil Bb=Cb und Mb=Mb; daher $MB=MC$; $b''=c'$; folglich $c'=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}C=c''$.

3) Dreieck MbC= Dreieck McC, weil Cb=Cc, und MC=MC; daher Mc=Mb=Ma; auf gleiche Weiſe ergiebt ſich die Gleichheit der übrigen Dreiecke, woraus MB=MC=MD..... und Ma=Mb=Mc..... folgt.

4) Endlich ſind die Katheten Ma, Mb, Mc,.... kleiner

als Quadranten, weil die ihnen gegenüberliegenden halben Polygonwinkel b', c', d'... ſpitze Winkel ſind; die Hypotenuſen MB, MC, MD,... ſind ebenfalls $<\frac{\pi}{2}$, weil auch die andern Katheten aB, bC,.... $<\frac{\pi}{2}$ ſind.

Hieraus iſt nun evident,

1) daß das Polygon ABCD... in einem Nebenkreiſe liegt, deſſen Mittelpunkt in M, deſſen Radius $=$ MB iſt;
2) daß die Mittelpunkte a, b, c,.... in einem Nebenkreiſe liegen, deſſen Mittelpunkt auch M, deſſen Radius $=$Ma iſt, und an welchen die Seiten AB, BC CD,... Tangenten ſind — alſo, daß das Polygon ABCD... ein um dieſen Kreis beſchriebenes iſt.

Zuſatz. Die Bogen von dem Mittelpunkte eines regelmäßigen ſphäriſchen Polygones nach den Ecken deſſelben halbiren die Winkel des Polygones (§. 67. Zuſ. 4.), und die nach den Mittelpunkten der Seiten gezogenen Bogen ſtehen auf denſelben ſenkrecht. (§. 61. Zuſ. 1.)

§. 73.

Lehrſatz. 1) Iſt ein ſphäriſches gleichſeitiges Polygon in einen Kreis beſchrieben, ſo iſt es ein regelmäßiges. 2) Iſt ein ſphäriſches gleichwinkliches Polygon um einen Kreis beſchrieben, ſo iſt es auch ein regelmäßiges.

Beweis. 1) Es ſey das Polygon ABCD.... (Figur 56.) ein gleichſeitiges in dem gleichnamigen Kreiſe. Zieht man von dem Mittelpunkte M dieſes Kreiſes die Radien MA, MB, MC....; ſo ſind die dadurch entſtandenen gleichſchenklichen Dreiecke wegen Gleichheit dreier Seiten unter ſich gleich; alſo Winkel $b'=b''$; $c'=c''$ u. ſ. w. Der

Gleichſchenklichkeit wegen iſt auch $b' = a$; $c' = b''$ u. ſ. w.; daher alle dieſe Winkel, mithin auch die Winkel des Polygones einander gleich, das daher regelmäßig iſt.

2) In Figur 55. ſey das Polygon ABCD.... gleichwinklich und um den Kreis abc.... beſchrieben, den es in den Punkten a, b, c,.... berührt. Zieht man vom Mittelpunkte M nach den Berührungspunkten Radien Ma, Mb, Mc,... welche auf den Tangenten ſenkrecht ſtehen; desgleichen nach den Winkelſpitzen die Bogen MB, MC..., welche jeden Winkel halbiren (§. 67. Zuſ. 4.); ſo hat man $b' = b''$; $c' = c''$; und da $B = C$ iſt, auch $b'' = c' = c'' = d'$..... Aus $b'' = c'$ folgt $MB = MC$, hieraus aber die Gleichheit der an b rechtwinklichen Dreiecke MbB, MbC, woraus $Bb = Cb$ folgt. Jede Seite des Polygones wird alſo durch den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius halbirt. Nach §. 67. Zuſ. 3. iſt aber $Cb = Cc$; daher auch $BC = DC$. So läßt ſich auf alle Seiten des Polygones ſchließen, das alſo auch gleichſeitig, mithin ein regelmäßiges iſt.

Zuſatz. Da das Polarpolygon eines gleichſeitigen im Kreiſe ein gleichſeitiges um den Polarkreis, und das eines gleichwinklichen um den Kreis ein gleichſeitiges im Polarkreiſe iſt, ſo laſſen ſich obige Sätze einer aus dem andern leicht herleiten.

Anmerk. Der Satz: „Das gleichſeitige Polygon um einen „Kreis und das gleichwinkliche in einem Kreiſe iſt ein regelmäßi„ges Polygon" — iſt nicht allgemein, ſondern nur dann gültig, wenn die Zahl der Ecken eine ungerade iſt. Doch bedingt der Kreis, wenn die Eckenzahl eine gerade iſt, eine Regelmäßigkeit ſo weit, daß bei gleichen Seiten nur zweierlei Winkel, bei gleichen Winkeln nur zweierlei Seiten vorkommen können, die ſo auf einander folgen, daß ein Größeres immer mit einem Kleinern abwechſelt. Der Beweis, der in dem Obigen hinreichende Andeutung findet, wird hier übergangen, da die Sache für unſern Zweck unweſentlich iſt.

§. 74.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Dreiecken, welche eine Sehne eines Nebenkreiſes zur gemeinſchaftlichen Grundſeite und ihre Spitzen in der Peripherie deſſelben Kreiſes haben, iſt das ſchiefere das kleinere.

Beweis. In dem Kreiſe (Figur 57.) CC″BA ſey auf der Sehne AB als Grundſeite das Dreieck ACB ein gleichſchenkliches und AC′B, AC″B zwei ſchiefe Dreiecke, deren Seiten AC″, BC′ ſich in D ſchneiden. Da der Winkel CAB=CBA, ſo iſt DAB<DBA; folglich DB>DA; daher DC″<DC′. (§. 64. Zuſ. 2.) Macht man alſo Db =DB; Dc=DC″ und zieht bo, ſo iſt das Dreieck Dbc= DBC″; aber Dbc<DAC′; alſo auch Dreieck DC″B< DC′A. Addirt man hiezu ADB=ADB, ſo folgt AC″B <AC′B.

Zuſatz 1. Das gleichſchenkliche Dreieck ABC iſt alſo das größte unter allen.

Zuſatz 2. Die Dreiecke zu beiden Seiten des gleichſchenklichen, welche gleich ſchief ſtehen, ſind von gleichem Flächenraume.

§. 75.

Lehrſatz. Alle Peripheriewinkel in einem und demſelben größeren Abſchnitte eines Nebenkreiſes ſind um eine und dieſelbe Differenz kleiner als die Summe der beiden Winkel, welche durch die Schenkel der Peripheriewinkel mit der ihre Endpunkte verbindenden Sehne gebildet werden.

Beweis. Solche Peripheriewinkel ſeyen AC′B, AC″B. (Figur 58.) Die Radien MA, MB, MC′, MC″ geben lauter gleichſchenkliche Dreiecke und es iſt der Winkel MAC′

$=MC'A$; $MBC'=MC'B$; daher $MC'A+MC'B=MAC'+MBC'=BAC'+ABC'-MAB-MBA$; alſo $AC'B=BAC'+ABC'-2MAB$.

Da die Winkel MAB, MBA dieſelben bleiben, für jede Lage von C, die nur die Winkel BAC', ABC' ändert, ſo iſt evident, daſs auch für jeden andern Punkt der Peripherie, etwa C'', muſs $AC''B=BAC''+ABC''-2MAB$ ſeyn.

Zuſatz 1. In dem kleineren Abſchnitte ADB iſt jeder Peripheriewinkel um dieſelbe Differenz gröſser, als die Summe der durch ſeine Schenkel mit der Sehne gebildeten Winkel. Denn es iſt der Winkel $MDA=MAD=MAB+BAD$; $MDB=MBD=MBA+ABD$; daher $MDA+MDB=BAD+ABD+MAB+MBA$; oder $BDA=BAD+ABD+2MAB$.

Zuſatz 2. Bezeichnet man die Winkel BAC', ABC', AC'B der Reihe nach mit A', B', C; und BAD, ABD, ADB mit A'', B'', D, die konſtante Differenz 2MAB mit U; ſo iſt nach dem Erwieſenen $C=A'+B'-U$; $D=A''+B''+U$.

Denkt man ſich die Sehne AB dem Mittelpunkt M mehr und mehr genähert, ſo nimmt U beſtändig ab; geht die Sehne durch den Mittelpunkt, ſo verſchwindet U und es wird $C=A'+B'$; $D=A''+B''$. Weiterhin nimmt U das entgegengeſetzte Zeichen an; es wird nämlich, wenn die Sehne über den Mittelpunkt gegangen iſt, der gröſsere Abſchnitt zum kleineren und daher $C=A'+B'+U$; $D=A''+B''-U$. Betrachtet man nun U als poſitiv, wenn es (nämlich die Winkel MAB, MBA) mit dem betreffenden Peripheriewinkel auf einer und derſelben Seite der Sehne liegt; im andern Falle aber als negativ; ſo iſt die Gleichung $C=A'+B'-U$ der allgemeingültige Ausdruck für jeden Peripheriewinkel, er mag in dem gröſsern Kreisabſchnitte liegen oder im kleinern.

Zuſatz 3. Da $C = A' + B' - U$, und
$D = A'' + B'' + U$ iſt, ſo iſt, wenn
man addirt $C + D = A' + A'' + B' + B''$, oder, wenn man $A' + A'' = C'AD$ mit A; $B' + B'' = C'BD$ mit B bezeichnet

$$C + D = A + B.$$

Den ſphäriſchen Vierecken alſo, welche in einem Kreiſe ihre Ecken haben, iſt die Eigenſchaft gemein, daß jede zwei Diagonalwinkel dieſelbe Summe geben, wie die andern beiden.

Da aber $A + B + C + D > 2\pi$ iſt, (weil das Viereck aus zwei Dreiecken beſteht); ſo iſt $C + D > \pi$; und $A + B > \pi$. Dieſe ſphäriſchen Vierecke unterſcheiden ſich alſo von den ebenen wieder dadurch, daß die Summe je zweier Diagonalwinkel größer als zwei Rechte iſt.

Zuſatz 4. Die ſphäriſchen Vierecke, welche um einen Kreis beſchrieben ſind, haben die Eigenſchaft, daß die Summen je zweier einander gegenüberliegenden Seiten ſich gleich ſind. Denn das Polarviereck des vorigen iſt ein um den Polarkreis beſchriebenes, in welchem $\overline{A} + \overline{B} = \overline{C} + \overline{D}$ iſt, weil oben $A + B = C + D$ war. Zieht man die Ungleichungen $C + D > \pi$; $A + B > \pi$; jede von der Gleichung $2\pi = 2\pi$ ab, ſo erhält man $\overline{C} + \overline{D} < \pi$; $\overline{A} + \overline{B} < \pi$. Alſo iſt in den genannten Vierecken die Summe jeder zwei einander gegenüberſtehenden Seiten kleiner, als ein halber Hauptkreis.

Zuſatz 5. Der Flächenraum T des auf einer Sehne als der Grundſeite liegenden Dreieckes, das ſeine Spitze in der Peripherie des Kreiſes hat, wie ABC' iſt $= A' + B' + C - \pi$, oder, da $A' + B' = C + U$ iſt, $T = 2C + U - \pi$. Iſt die Sehne ein Durchmeſſer, alſo $U = 0$, ſo iſt $T = 2C - \pi$.

Hieraus folgt, daß $C > \frac{\pi}{2}$ iſt. Der Winkel im Halbkreiſe iſt alſo immer ein ſtumpfer.

Zuſatz 6. Unter den Peripheriewinkeln auf einer Sehne iſt derjenige, deſſen Schenkel ein ſchieferes Dreieck auf der Sehne bilden, der kleinere.

Denn nimmt man (Figur 58.) die Dreiecke ABC', ABC'', deren Flächenräume mit T', T'' bezeichnet ſeyen, ſo iſt nach vorigem Zuſatze $T'=2C'+U-\pi$; $T''=2C''+U-\pi$; daher iſt $2C'=\pi-U+T'$ oder $2C'=\overline{U}+T'$; eben ſo $2C''=\overline{U}+T''$. Da nun nach §. 74. $T'>T''$ iſt, ſo folgt $2C'>2C''$, oder $C'>C''$.

Der größte unter dieſen Peripheriewinkeln iſt alſo der im gleichſchenklichen Dreiecke, C. Denkt man ſich dieſen nach C', C'' hin rückend, ſo wird er immer kleiner. — Sein Minimum iſt in B, wo AC mit AB zuſammenfällt; denn da iſt $T=O$; alſo $2C=\overline{U}$, oder $C=\frac{1}{2}\overline{U}$, gleich dem Komplemente von MBA. Zieht man an B die ſphäriſche Tangente EF, ſo iſt der Winkel ABE, als Komplement von $MBA\left(=\frac{1}{2}U\right)$, dieſe Grenze des Peripheriewinkels. Wirklich fällt auch der Schenkel CB, indem er, bei dem Zuſammengehen des Punktes C mit B verſchwindet, in die Richtung der Tangente und bildet mit dem andern auf AB fallenden Schenkel AC den Winkel ABE.

Zuſatz 7. Für die Peripheriewinkel im andern Kreisabſchnitte iſt die Grenze $=\frac{1}{2}(\pi+U)=ABF$.

Zuſatz 8. Die Grenze für die Peripheriewinkel im Halbkreiſe iſt ein Rechter; denn da iſt $U=O$.

Zuſatz 9. Der Lehrſatz nebſt den daraus gezogenen Folgerungen iſt auch gültig, 1) wenn die Peripheriewinkel auf verſchiedenen, aber gleichen Sehnen und Abſchnitten eines und deſſelben Kreiſes ſtehen; 2) wenn ſie in verſchiedenen aber gleichen Kreiſen auf gleichen Sehnen und Abſchnitten liegen; wie leicht einzuſehen iſt.

§. 76.

Lehrſatz: Die Spitzen derjenigen auf gemeinſchaftlicher Grundſeite liegenden ſphäriſchen Dreiecke, deren Winkel an der Spitze um eine und dieſelbe Differenz kleiner oder größer, als die reſpektive Summe der an der Grundſeite liegenden Winkel ſind, liegen auf der Peripherie eines Kreiſes, in welchem jene gemeinſchaftliche Grundſeite eine Sehne iſt.

Beweis. Es ſeyen (Figur 59.) ABC, ABC′ zwei ſolche Dreiecke, in denen CAB+CBA—ACB=C′AB+C′BA—AC′B iſt. Um das Dreieck ABC ſey ein Kreis beſchrieben. Träfe dieſer die Seite AC′ nicht in dem Punkte C′, ſo müßte er ſie entweder zwiſchen A und C′, etwa in C″; oder auf deren Verlängerung über C′ in einem Punkte C‴ ſchneiden. Er ſchneide ſie in C″; ſo iſt nach vorigem Lehrſatze CAB+CBA—ACB=C″AB+C″BA—AC″B; daher wegen gegenwärtiger Vorausſetzung C″AB+C″BA—AC″B=C′AB+C′BA—AC′B oder, da C″AB=C′AB iſt, C″BA—AC″B=C′BA—AC′B; oder C″BA+AC′B=C′BA+AC″B; nimmt man auf beiden Seiten C″BA weg, ſo erhält man AC′B=C″BC′+AC″B, oder AC″B=AC′B—C″BC′; was unmöglich iſt. (§. 24. Zuſ. 5.)

Alſo kann der um das Dreieck ABC gelegte Kreis die Seite AC′ nicht zwiſchen A und C′ treffen. Träfe er ſie in C‴, ſo giebt die Wiederholung obiger Schlüſſe als Bedingung AC′B=AC‴B—C‴BC′; was ebenfalls unmöglich iſt. Daher iſt der Satz evident.

Sind die Winkel an der Spitze um gleiche Differenzen größer, als die reſpektiven Summen der an der Grundſeite liegenden Winkel, ſo ergeben dieſelben Schlüſſe die Richtigkeit der Behauptung.

Zuſatz 1. In dem erſten Falle, wenn nämlich die

Winkel an der Spitze **kleiner** ſind, als die Summe der Winkel an der Grundſeite, liegen die Dreiecke im **größern** Abſchnitte des Kreiſes; denn läge ABC im kleineren durch die Sehne AB gebildeten Abſchnitte des umſchriebenen Kreiſes, ſo würde ein Widerſpruch mit §. 75. entſtehen. Daher liegen die Dreiecke im zweiten Falle in dem kleinern Kreisabſchnitte.

Zuſatz 2. Aus dieſer Umkehrung ergiebt ſich auch die Richtigkeit der Umkehrung des dritten und vierten Zuſatzes im vorigen §. Nämlich:

1) Sind die Summen je zweier Diagonalwinkel eines ſphäriſchen Viereckes gleich, ſo läßt ſich ein Kreis **um** das Viereck beſchreiben.
2) Sind die Summen je zweier einander gegenüber ſtehenden Seiten eines ſphäriſchen Viereckes gleich, ſo läßt ſich ein Kreis **in** das Viereck einſchreiben.

§. 77.

Erklärung. 1) Ein ſphäriſches Dreieck liegt zwiſchen zwei Nebenkreiſen, wenn zwei ſeiner Spitzen in der Peripherie des einen, die dritte in der Peripherie des andern Kreiſes liegt.

2) Ein ſphäriſches Viereck liegt zwiſchen zwei Nebenkreiſen, wenn zwei Ecken deſſelben, die nicht Diagonalecken ſind, in der Peripherie des einen, die andern beiden aber in der Peripherie des andern Kreiſes liegen.

§. 78.

Lehrſatz. Alle ſphäriſche Dreiecke, welche auf derſelben Grundſeite und zwiſchen denſelben Gegenkreiſen liegen, haben gleichen Flächenraum.

Beweis. (Figur 60.) Zwiſchen den Gegenkreiſen ABC′, A′B′C ſey auf der Sehne AB als Grundſeite das

Dreieck ABC errichtet und deſſen Seiten AC, AB über A, B verlängert bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte C', der als Gegenpunkt von C in der Peripherie des Gegenkreiſes ABC' liegt. So hat man das Nebendreieck ABC' des vorigen; ein in den Kreis ABC' eingeſchriebenes, deſſen Flächenraum $T' = 2C + U - \pi$ iſt. (§. 75. Zuſ. 5.) Der Flächenraum der Spindel C'ABC iſt $= 2C$. Bezeichnet man alſo mit T den Flächenraum ABC, ſo iſt

$$T + T' = 2C; \text{ hievon die Gleichung}$$
$$T' = 2C + U - \pi \text{ abgezogen,}$$

giebt .... $T = \pi - U = \overline{U}$.

Da der Werth von U nur von der Sehne AB und der Größe des Radius des Nebenkreiſes abhängt, ſo haben alle Dreiecke auf der Grundſeite AB und zwiſchen denſelben Gegenkreiſen den nämlichen Flächenraum.

Zuſatz 1. Wegen §. 75. Zuſ. 9. läßt ſich der Lehrſatz allgemeiner ſo ausſprechen: Alle ſphäriſche Dreiecke auf gleichen Grundſeiten und zwiſchen reſpektiven gleichen Gegenkreiſen haben gleichen Flächenraum.

Zuſatz 2. Wie ABC als Nebendreieck von ABC' den konſtanten Flächenraum $\pi - U$ hat, ſo hat das Nebendreieck von ABD (im andern Kreisabſchnitte) den konſtanten Flächenraum $\pi + U$, weil U für ABD das entgegengeſetzte Zeichen annimmt. (§. 75. Zuſ. 2.)

Das Nebendreieck von ABD iſt ABD', wo D' den Gegenpunkt von D andeutet. Alle Dreiecke alſo, wie ABD' haben den Flächenraum $\pi + U$; während die vorher erwähnten, wie ABC, gleich $\pi - U$ ſind.

Beiderlei Dreiecke haben einerlei Grundſeiten und liegen zwiſchen denſelben Gegenkreiſen; ſie unterſcheiden ſich aber dadurch von einander, daß die einen *über*, die andern *unter* der gemeinſchaftlichen Grundſeite liegen.

Zuſatz 3. Die Entſcheidung, wie weithin auf der Peripherie CA'B' die Spitze C liegen könne, ergiebt ſich aus

der Lage des Gegenpunktes C'. Die Spitze C' des Nebendreieckes ABC' kann nämlich überall auf dem Peripherieabſchnitte AC'B liegen, nur nicht auf dem Implement ADB, weil ſonſt das Dreieck ABC' in das Dreieck ABD des andern Kreisabſchnittes übergehen würde. Folglich kann der Gegenpunkt C überall auf dem Peripherieabſchnitte A'CB', nur nicht auf dem Implemente A'D'B' liegen. Hieraus folgt nun auch, daß die Spitzen der Dreiecke unter der Baſis AB, wie ABD', ihre Spitzen von B' über D' bis A' haben können.

Zuſatz 4. Kommt die Spitze C auf eine der Grenzen A', B', etwa auf A'; ſo geht das Dreieck ABC über in eine Spindel. Denn es wird dann AC=AA', ein halber Hauptkreis; BC wird BA' und bildet mit BA ebenfalls einen durch B gehenden Hauptkreis. Der Flächenraum dieſer Spindel ABGA' iſt indeß ebenfalls $=\pi-U$. Denn je näher C an A' kommt, deſto mehr nähert ſich AC dem Zuſtande einer Tangente, und wird wirklich eine Tangente, wenn C mit A' zuſammentrifft. Der Winkel der Tangente mit der Sehne AB iſt aber nach §. 75. Zuſ. 6. $=\frac{1}{2}\overline{U}$. Der Flächenraum der Spindel iſt dem Doppelten dieſes Winkels gleich, alſo $=\overline{U}=\pi-U$.

Zuſatz 5. Iſt die gemeinſchaftliche Grundſeite ein Durchmeſſer des Kreiſes, ſo iſt $U=0$; daher $T=\pi$. Die Dreiecke alſo, welche zwiſchen gleichen Gegenkreiſen liegen, und den Durchmeſſer eines dieſer Kreiſe zur Grundſeite haben, nehmen jedes den vierten Theil der Kugelfläche ein; und zwar bei jeder beliebigen Größe des Durchmeſſers. — Eine merkwürdige Eigenſchaft!

Zuſatz 6. Nimmt man von den Dreiecken, wie ABC, das gemeinſchaftliche Segment ABD, deſſen Flächenraum durch s bezeichnet ſey, weg; ſo ſind die übrigbleibenden Räume, wie CADB — ebenfalls ſphäriſche Dreiecke, deren Baſis ADB jedoch ein Nebenbogen iſt — von gleichem Inhalte, nämlich $=\pi-(U+s)$.

Die Gleichheit ſolcher Afterdreiecke giebt ein Analogon zu dem planimetriſchen Satze: „Dreiecke von gleicher Grund„linie und Höhe haben gleichen Flächenraum.“

Dieſe Analogie geht noch weiter; denn ſolche Afterdreiecke zwiſchen reſpektiven gleichen Gegenkreiſen verhalten ſich bei ungleichen Grundſeiten, wie ihre Grundſeiten — wie leicht zu erweiſen iſt.

§. 79.

Aufgabe. Es iſt ein ſphäriſches Dreieck gegeben; man ſoll zwei Gegenkreiſe konſtruiren, zwiſchen welchen das gegebene Dreieck liegt.

Auflöſung 1. Das gegebene Dreieck ſey ABC (Figur 61.) und AB ſey die Grundſeite. Man verlängere AC, BC über A, B bis zum zweiten Durchſchnitte C′; beſchreibe um das Nebendreieck ABC′ einen Kreis (§. 43.), deſſen Mittelpunkt M ſey. Um den Gegenpunkt des letztern, um M′, beſchreibe man mit dem Radius M′C einen Kreis; ſo iſt der Aufgabe genügt.

Beweis. Da der Bogen M′C = MC′ als Gegenbogen, und M′ der Gegenpunkt von M iſt, ſo ſind die Kreiſe Gegenkreiſe und das gegebene Dreieck liegt zwiſchen denſelben.

Auflöſung 2. Zu dem gegebenen Dreiecke ABC, deſſen Baſis AB ſey, konſtruire man das Nebendreieck ABC′ und deſſen Gegendreieck A′B′C und beſchreibe um beide Kreiſe.

Beweis. Es iſt nur zu zeigen, daß dieſe Kreiſe Gegenkreiſe ſind. Der Kreis um ABC′ ſey mit K, der um A′B′C mit K′ bezeichnet. Wäre K′ nicht der Gegenkreis von K, ſo ſey es ein anderer K″. Dann müßte K″ auch durch die Punkte A′, B′, C gehen, wie K′. Aber zwei Kreiſe können nicht drei Punkte gemein haben. Folglich iſt K′ der Gegenkreis von K.

Zuſatz. Es giebt nur ein Paar Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Dreieck liegen kann; vorausgeſetzt, daß eine und dieſelbe Seite immer als Grundſeite genommen wird, deren Endpunkte beide in einem und demſelben Kreiſe liegen müſſen.

§. 80.

Lehrſatz. Alle ſphäriſche Dreiecke über einerlei Grundſeite und von gleichem Flächenraume liegen zwiſchen einerlei Gegenkreiſen.

Beweis. Es ſey (Figur 60.) ABC eins dieſer Dreiecke auf der Grundſeite AB, und CA'B', C'AB ſeyen die Gegenkreiſe, zwiſchen denen es liegt. Wäre ein Dreieck ABE möglich, welches eben ſo groß und auf derſelben Grundſeite liegend ſeine Spitze E nicht auf der Peripherie CA'B' hätte, ſo liege ſie innerhalb des Gegenkreiſes. Die Seite BE ſchneidet dann in einem Punkte F dieſelbe Peripherie. Man ziehe AF. So iſt nach §. 78. das Dreieck AFB=ABC, und der Hypotheſis wegen müßte auch AFB=AEB ſeyn; was unmöglich iſt.

Auf ähnliche Weiſe folgt, daß E nicht außerhalb des Kreiſes CA'B' liegen kann. Mithin iſt der Satz evident.

Anmerk. Aus §. 76. ließe ſich der Beweis direkt führen.

Zuſatz. Wegen §. 78. Zuſ. 1. gilt der Satz allgemeiner ſo: Alle ſphäriſche Dreiecke auf gleichen Grundſeiten und an gleichem Flächenraume liegen zwiſchen reſpektiven gleichen Gegenkreiſen.

§. 81.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Dreiecken, welche auf einer und derſelben Sehne eines Nebenkreiſes ſtehend, ihre Spitzen in

der Peripherie deſſelben haben, hat das ſchiefere einen kleinern Umfang.

Beweis. Denn ſind (Figur 61:) AC'B, AC''B ſolche Dreiecke, ſo haben ihre Nebendreiecke ABc', ABc'' gleichen Flächenraum (§. 78.); alſo das ſchiefere ABc'' einen größeren Umfang. (§. 53.) Daher iſt $Ac'' + Bc'' > Ac' + Bc'$; mithin $AC'' + BC'' < AC' + BC'$.

Zuſatz. Das gleichſchenkliche Dreieck ABC hat alſo den größten Umfang.

§. 81.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Dreieck zu konſtruiren, welches mit einem gegebenen Dreiecke gleiche Grundſeite, gleichen Flächenraum und an der Grundſeite einen gegebenen Winkel hat.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſey ABC (Figur 62.) und AB deſſen Grundſeite. Man konſtruire die Gegenkreiſe, zwiſchen denen es in Bezug auf dieſe Grundſeite liegt (§. 79.); lege an einem Endpunkte der Grundſeite, etwa A, den gegebenen Winkel an, deſſen Schenkel in D den Gegenkreis ſchneidet; ſo iſt ABD das verlangte Dreieck.

Beweis iſt aus dem Vorhergehenden hinreichend klar.

Zuſatz. Wird ſtatt des Winkels an der Grundſeite die Bedingung gegeben, daß das Dreieck gleichſchenklich ſey; ſo errichtet man auf der Mitte E der Grundſeite ein Perpendikel, deſſen Durchſchnitt F mit dem andern Gegenkreiſe die Spitze des geforderten Dreieckes giebt.

§. 83.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Dreieck in eine Spindel von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflöſung. Zu dem gegebenen Dreiecke ABC (Figur 62.) konſtruire man wie im vorigen §. ſeine Gegenkreiſe; lege an den einen in A eine Tangente, die im Gegenpunkte A' den andern Kreis berührt, und verlängere AB bis A', ſo iſt AA'B die verlangte Spindel.

Beweis ergiebt ſich aus §. 78. Zuſ. 4.

Anmerk. Dieſe Aufgabe iſt ein ſpezieller Fall der vorhergehenden; der Fall nämlich, wenn der dort gegebene Winkel an der Grundſeite ein Minimum iſt. Vergl. §. 75. Zuſ. 6.

§. 84.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Polygon in eine Spindel von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflöſung. Das zu verwandelnde Polygon ſey ABCD.... (Figur 63.) Um eine Ecke deſſelben, etwa B, verſchwinden zu laſſen, lege man zwei Gegenkreiſe, den einen durch die nächſten Ecken A, C; den andern durch B ſelbſt (§. 79.); verlängere CD bis zum Durchſchnitte C' mit letzterem und ziehe AC'; ſo hat man ein Polygon AC'DE.... von gleichem Flächenraume mit einer Ecke weniger. Auf dieſelbe Weiſe entfernt man eine Ecke nach der andern, bis das Polygon auf ein Dreieck reducirt iſt, das nach vorigem §. in eine Spindel verwandelt wird.

Beweis. Das Polygon AC'DE.... iſt dem urſpünglichen gleich, weil das Dreieck ABC=AC'C (§. 78.); alſo ABC+ACDE....=AC'C+ACDE.... iſt.

§. 85.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten ein ſphäriſches Dreieck von gegebenem Flächenraume zu konſtruiren.

Auflöſung. Der Flächenraum ſey =T; die gegebe-

nen Seiten a, b. Man ſetze $T=\pi-U$; ſo iſt $U=\pi-T$ gegeben. Man nehme nun (Figur 64.) $AB=b$; lege an A und B zwei Winkel ABC, BAC, jeden $=\frac{1}{2}U$, deren Schenkel den Durchſchnitt C geben; nehme den Gegenpunkt C′ des letzteren und beſchreibe um C′ mit dem Radius AC einen Kreis. Endlich beſchreibe man um A mit dem Radius $=a$ einen Kreis, der in D den erſteren ſchneide; — ſo leiſtet das Dreieck ABD der Aufgabe Genüge.

Beweis. Beſchreibt man auch um C mit dem Radius AC einen Kreis, der durch B geht, weil $BC=AC$; ſo iſt derſelbe der Gegenkreis des um C′ beſchriebenen. Da nun das Dreieck ABD zwiſchen dieſen Gegenkreiſen liegt, ſo iſt aus §. 78. evident, daß ſein Flächenraum $=\pi-U=T$ ſey.

Zuſatz 1. Iſt der gegebene Flächenraum T gleich π; ſo iſt $U=O$; dann wird C der Mittelpunkt von AB. Iſt $T>\pi$; ſo iſt U negativ, und die Winkel an A und B müſſen über AB liegen, wenn nämlich das zu konſtruirende Dreieck über AB liegen ſoll. Der Grund ergiebt ſich aus §. 75. Zuſ. 2. und §. 77. Zuſ. 2.

Zuſatz 2. Da zwei Kreiſe ſich in zwei Punkten ſchneiden, ſo giebt es außer D noch einen Durchſchnitt, alſo im Allgemeinen zwei verſchiedene Dreiecke, welche der Aufgabe genügen. Doch fällt dies zweite Dreieck weg, wenn der zweite Durchſchnitt auf dem Gegenbogen des Nebenbogens AB liegt; wegen §. 78. Zuſ. 3.

Die Bedingung übrigens, unter welcher zwei verſchiedene Dreiecke aus a, b, T möglich ſind, d. h. unter welcher der zweite Durchſchnitt außerhalb des Nebenbogens A′B′ liegt, iſt, daß $a+b<\pi$ ſey. Der Beweis folgt aus §. 63. Zuſ. 2.

Anmerk. Legt man die Seite a an den Punkt B, ſo erhält man die ſymmetriſchen Dreiecke der vorigen.

Digitized by Google

Zuſatz 3. Verlängert man den Bogen AC über A, ſo ſchneidet er den andern Gegenkreis in einem Punkte B′ und geht durch den Mittelpunkt C′ deſſelben. Da der Bogen AB′ der kürzeſte unter allen iſt, welche von A nach der Peripherie des Gegenkreiſes gehen (§. 63. Zuſ. 2.); ſo darf die gegebene Seite a nicht kleiner, als AB′ ſeyn, und es iſt alſo AB′ das Minimum für a.

Konſtruirt man zu dem Dreiecke ABB′, dem das Minimum AB′ gehört, das Nebendreieck ABB″, ſo iſt deſſen Seite AB″ ein Durchmeſſer, alſo, nach §. 75. Zuſ. 2., Winkel ABB″ = BAB″ + BB″A; daher π — ABB″ = π — BAB″ — BB″A; d. i. ABB′ = BAB′ — BB′A, wenn BB′A für den gleichen BB″A geſetzt wird. Hieraus aber folgt BAB′ = ABB′ + BB′A. Daher iſt auch die Seite BB′ der Durchmeſſer des um ABB′ beſchriebenen Kreiſes. (§. 75. Zuſ. 2.; §. 76.)

Unter den ſphäriſchen Dreiecken alſo, welche gleichen Flächenraum und gleiche Grundſeiten haben, hat dasjenige, in welchem eine zweite Seite ein Minimum iſt, den Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes zur dritten Seite.

Von der Richtigkeit der Umkehrung:

Bei den ſphäriſchen Dreiecken von gleichem Flächenraume und gleichen Grundſeiten iſt die zweite Seite desjenigen Dreieckes, deſſen dritte Seite der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt, die kleinſte unter den übrigen an die reſpektive Grundſeite ſtoßenden Seiten —

wird man ſich, obige Schlüſſe rückwärts wiederholend, leicht überzeugen.

Anmerk. Man wird die Analogie mit dem ebenen Dreiecke hier, ſo wie in dem Folgenden, nicht überſehen.

§. 86.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Dreiecken, welche aus zwei gegebenen und einer drit-

ten willkührlichen Seite gebildet werden können, hat dasjenige, deſſen dritte Seite der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt, den größten Flächenraum.

Beweis. In dem Dreiecke (Figur 65.) ſey die Seite BB′ der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes. In dem Nebendreiecke ABB″ deſſelben iſt alſo nach §. 85. Zuſ. 3. auch AB″ der Durchmeſſer des um daſſelbe beſchriebenen Kreiſes. Konſtruirt man dieſen und ſeinen Gegenkreis, der durch B′, den Gegenpunkt von B″ gehen muß; ſo iſt AB′ der kürzeſte Bogen von A nach der Peripherie deſſelben, weil er verlängert durch den Mittelpunkt C′, den Gegenpunkt von C, des erſteren Kreiſes, geht. Jedes andere Dreieck nun, welches aus den Seiten AB, AB′ gebildet, über der Grundſeite AB möglich iſt, muß ſeine Spitze in der Peripherie des Nebenkreiſes, der um A mit dem Radius AB′ beſchrieben wird, haben. Ein ſolches ſey AGB. Die Seite AG verlängere man, bis zur Peripherie des Gegenkreiſes um C′, den ſie in D treffe, und ziehe BD; ſo iſt das Dreieck ABB′=ABD; aber ABD>ABG; alſo ABB′>ABG. Da für jede andere Lage von G daſſelbe gilt, ſo iſt der Satz evident.

Zuſatz. Soll die Hypotheſis des Lehrſatzes möglich ſeyn, ſo muß die Summe der gegebenen Seiten kleiner als ein Halbkreis ſeyn. Denn bezeichnet man ſie mit a, b; die dritte beliebige Seite mit c; die Winkel des Dreieckes mit A, B, C; ſo muß, wenn c der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt, $C = A + B$; alſo, weil $C < \pi$; auch $A + B < \pi$; mithin $a + b < \pi$ ſeyn.

Daß ein größtes Dreieck immer möglich iſt, wenn die gegebenen Seiten a, b dieſer Bedingung genügen, zeigt der folgende §.

§. 87.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten, deren

Summe kleiner als ein Halbkreis iſt, ein größtes Dreieck zu konſtruiren.

Auflöſung. Die gegebenen Seiten ſeyen a, b, deren Summe $a+b<\pi$ iſt. Man nehme (Figur 66.) $AB=b$. Da $a+b<\pi$ iſt, ſo iſt $b<\pi-a$; oder $b<\bar{a}$; daher auch $\frac{1}{2}b<\frac{1}{2}\bar{a}$; beſchreibt man alſo um A und um B Kreiſe, jeden mit dem Radius $\frac{1}{2}\bar{a}$, ſo geben dieſe einen Durchſchnitt M, außerhalb AB. Zieht man den Radius MA und verlängert ihn über A bis B', ſo daß $AB'=a$ wird, verlängert ihn dann über B' bis M', den Gegenpunkt von M; ſo iſt $M'B'=MA$. Denn MAB'M' iſt $=\pi$; daher $M'B'=\pi-a-\frac{1}{2}\bar{a}=\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{a}=\frac{1}{2}\bar{a}=MA$. Der um M' mit dem Radius M'B' beſchriebene Kreis iſt alſo der Gegenkreis des um M mit dem Radius MA beſchriebenen. Das Dreieck ABB', welches die gegebenen Seiten hat, liegt alſo zwiſchen dieſen Gegenkreiſen, und hat, weil AB' der kürzeſte Bogen von A nach der Peripherie des andern Gegenkreiſes iſt, einen größern Flächenraum, als jedes andere aus den Seiten a, b, gebildete. (§. 86.)

Zuſatz 1. Iſt $a+b=\pi$; ſo iſt $b=\bar{a}$. Dann fällt der Durchſchnitt M (als Berührungspunkt) mit dem Mittelpunkte D des Bogens AB zuſammen; AB fällt mit AB' in einen Halbkreis zuſammen; B und B' ſind Gegenpunkte, daher auch BB' ein Halbkreis; das ganze Dreieck wird alſo eine Spindel. Das Maximum iſt alſo in dieſem Falle eine Spindel, kein Dreieck.

Iſt aber $a+b>\pi$; ſo iſt $b>\bar{a}$; $\frac{1}{2}b>\frac{1}{2}\bar{a}$; daher iſt kein Durchſchnitt M möglich.

Zuſatz 2. Unter den ſphäriſchen Dreiecken, welche aus zwei gegebenen Seiten, deren Summe kleiner als ein Halb-

kreis iſt, gebildet werden können, hat das größte die Eigenſchaft, daß die dritte nicht gegebene Seite desſelben der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt.

§. 88.

Lehrſatz: Aus zwei gegebenen Seiten, deren Summe größer als ein Halbkreis iſt, iſt kein größtes Dreieck möglich.

Beweis. Die gegebenen Seiten ſeyen a, b und $a + b > \pi$; dann iſt $\bar{a} + \bar{b} < \pi$, und es läßt ſich aus $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ein größtes Dreieck konſtruiren. Dies ſey (Figur 67.) das Dreieck ABC, deſſen Seite AB der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt; von den andern Seiten deſſelben ſey $AC = \bar{b}$; $CB = \bar{a}$. Man denke ſich den Schenkel CB beweglich um den feſten Punkt C; ſo wird der Punkt B den Kreis B′B″BB‴ beſchreiben, der in B′ die Seite AC, in B‴ deren Verlängerung und in B den um ABC beſchriebenen Kreis ſchneidet. Verſetzt man nun CB auf CB′, ſo iſt der Winkel an C (ACB′) Null; bewegt ſich der Bogen CB aus dieſer Lage nach der Richtung B′B‴, ſo wächſt der Winkel an C und mit ihm der Flächenraum des Dreieckes; in B erreicht letzterer ſein Maximum, nimmt alſo jenſeit B wieder ab, während jedoch der Winkel an C, der ſchon als ACB ein ſtumpfer war, fortwächſt. Der Winkel an A, von Anfang an wachſend, erreicht ſein Maximum, wenn B in B″, dem Berührungspunkte der von A an den Kreis B′BB‴ gezogenen Tangente, iſt und nimmt weiterhin fortwährend ab. Kommt der Punkt B nach B‴, ſo iſt der Winkel an $C = \pi$; der Winkel an A verſchwindet, das Dreieck mit ihm.

Nimmt man nun den Gegenpunkt von C, der in C′ ſey; ſo ſchneiden die über A, B verlängerten Seiten AC, BC ſich in C′ und in dem Dreiecke AC′B iſt $AC' = b$; $BC' = a$. Die Spindel CABC′ wächſt bei der oben be-

trachteten Bewegung des Schenkels CB (oder des Halbkreiſes CBC′) in dem Maaße, wie der Winkel an C; nimmt alſo, wenn $C = \pi$ iſt, die halbe Kugelfläche ein. Das aus den Seiten a, b gebildete Dreieck ABC′, als die Differenz zwiſchen der Spindel und dem Dreiecke ABC, wächſt offenbar vom Anfange der Bewegung an und um ſo mehr, ſobald das Dreieck ABC nach erreichtem Maximum wieder abnimmt. Es erreicht alſo kein Maximum des Flächenraumes, ſondern geht, ſobald der Winkel an $C' = \pi$ wird, in einen Hauptkreis über, der die halbe Kugelfläche einnimmt.

§. 89.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Polygonen von n Seiten, welche aus (n—1) gegebenen und einer nten beliebig zu wählenden zuſammengeſetzt ſeyn können, hat das größte, wenn ein ſolches möglich iſt, die Eigenſchaft, daß ſeine Ecken in der Peripherie eines Kreiſes liegen, deſſen Durchmeſſer die nte, nicht gegebene, Seite iſt.

Beweis. Es ſey (Figur 68.) ABCDEF das größte Polygon unter denen, welche mit ihm außer der Seite AF die übrigen gemein haben. Wäre unter den Ecken deſſelben eine, die nicht in der Peripherie des über AF als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſes läge, etwa D; ſo ziehe man AD und DF. Das Dreieck ADF iſt dann nicht das größte der Seiten AD, FD. Giebt es aber ein größeres Dreieck mit den Seiten AD, DF, ſo giebt es auch, wenn man mit dem größten die Polygonabſchnitte ABCD und DEF verbindet, ein größeres Polygon mit den gegebenen Seiten, als ABCDEF iſt, welches doch das größte ſeyn ſollte. Da dies der Vorausſetzung widerſpricht, ſo iſt die Annahme, es liege D außerhalb der Peripherie, falſch. Alſo muß jede

Ecke des größten Polygones in der genannten Peripherie liegen.

Zuſatz. Auch hier findet ſich die Bedingung der Möglichkeit eines Größten, daß die Summe der gegebenen Seiten kleiner, als ein halber Hauptkreis ſeyn muß. Denn jede der Sehnen AB, BC,.... iſt kleiner, als der zugehörige Nebenbogen des umgeſchriebenen Kreiſes; daher ihre Summe kleiner, als der halbe Nebenkreis, um ſo mehr alſo kleiner, als ein halber Hauptkreis.

§. 90.

Lehrſatz. Wenn aus (n—1) gegebenen Seiten zwei ſphäriſche Polygone, jedes von n Seiten, ſo zuſammengeſetzt ſind, daß die Ecken eines jeden in einem Halbkreiſe liegen, deſſen Durchmeſſer die nicht beſtimmte nte Seite des Polygones iſt; ſo haben die beiden Polygone gleichen Flächenraum.

Beweis. In den Polygonen (Figur 69.) ABCDE und A′B′C′D′E′ ſey AB = A′B′; BC = B′C′; CD = C′D′; und DE = D′E′; ferner ſeyen AE, A′E′ die Durchmeſſer der Kreiſe, in deren Peripherien die Ecken beider Polygone liegen. Wir behaupten nun, die Durchmeſſer AE, A′E′ der Kreiſe, alſo die Kreiſe ſelbſt, ſind einander gleich. Denn wäre etwa AE < A′E′, ſo halbire man AE, A′E′ in M, M′; ſo wie AB, A′B′ in N, N′; und ziehe MB, M′B′; MN, M′N′, welche letztere beide auf AB, A′B′ ſenkrecht ſind. (§. 40. Zuſ. 1.) Da AE < A′E′, ſo iſt auch AM < A′M′; in den rechtwinklichen Dreiecken ANM, A′N′M′ iſt alſo AN = A′N′, aber AM < A′M′; daher iſt Winkel AMN > A′M′N′ (§. 38. Zuſ. 1. 2.); und auch NMB > N′M′B (§. 40. Zuſ. 1.); daher iſt AMB > A′M′B′. Eben ſo folgt BMC > B′M′C′; CMD > C′M′D′; DME > D′M′E′. Es müßte alſo AMB + BMC + CMD + DME > A′M′B′ +

$B'M'C' + CM'D' + D'M'E'$ ſeyn, was nicht ſeyn kann. Alſo kann AE nicht $< A'E'$ ſeyn. Auf gleiche Weiſe folgt, daß AE nicht $> A'E'$ ſeyn kann; mithin muß $AE = A'E'$ ſeyn. Iſt dies aber, ſo iſt $AM = A'M'$; $BM = B'M'$ u. ſ. w., alſo die Dreiecke AMB, BMC,.... den Dreiecken $A'M'B'$, $B'M'C'$,... gleich; mithin auch ihre Summen, die Polygone von gleichem Flächenraume.

Zuſatz. Folgen die gegebenen Seiten in dem einen Polygone in anderer Ordnung auf einander, als in dem andern, ſo ſtört dies die gemachten Schlüſſe nicht. So viele Verſetzungen der gegebenen Seiten möglich, ſo viele verſchiedene Polygone erhält man, die indeß alle gleichen Flächenraum haben.

Anmerk. Die Verſetzungszahl iſt $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (n-1)$, wenn die gegebenen Seiten alle von einander verſchieden ſind; ſonſt iſt ſie bekanntlich $\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (n-1)}{1.\ 2 \ldots \alpha.\ 1.\ 2.\ 3 \ldots \beta \text{ ꝛc.}}$; wenn eine αmal, eine andere βmal ꝛc. vorkommt.

§. 91.

Lehrſatz. Iſt aus $(n-1)$ gegebenen Seiten und einer willkührlichen Seite ein ſphäriſches Polygon ſo zuſammengeſetzt, daß die Spitzen deſſelben in der Peripherie eines Kreiſes liegen, deſſen Durchmeſſer jene willkührliche Seite iſt, ſo hat das Polygon den größten Flächenraum, welchen die gegebenen Seiten zulaſſen.

Beweis. Das hier bezeichnete Polygon ſey P. Nach §. 89. hat das aus den gegebenen $(n-1)$ Seiten aus einer $n$ten willkührlichen zuſammengeſetzte größte Polygon P' ſeine Ecken in der Peripherie eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer jene $n$te Seite iſt. Nach §. 90. haben alle Polygone aus den gegebenen $(n-1)$ Seiten und der beliebigen $n$ten

8

gleichen Flächenraum. Zu dieſen gehört nun ſowohl P', als auch P. Daher iſt $P = P'$. Alſo iſt das im Lehrſatze bezeichnete Polygon ein Maximum.

§. 92.

Lehrſatz. Wenn aus n gegebenen Seiten zwei nſeitige ſphäriſche Polygone ſo zuſammengeſetzt ſind, daß jedes ſeine Ecken in einer Kreisperipherie hat; ſo ſind die Polygone von gleichem Flächenraume.

Beweis. Die Seiten der Polygone (Fig. 70.) ABCD...., A'B'C'D'....., ſeyen reſp. gleich; nämlich $AB = A'B'$; $BC = B'C'$ u. ſ. w.; und M, M' ſeyen die Mittelpunkte der Kreiſe, in deren Peripherien die Ecken der Polygone liegen. Wären nun die Radien MA, M'A' einander nicht gleich; ſo ſey $MA < M'A'$. Daraus folgt, wie in §. 90, daß der Winkel $AMB > A'M'B'$; $BMC > B'M'C'$ u. ſ. w.; endlich, daß die Winkel um den Punkt M zuſammen größer als die um M' ſeyn müßten; daher können die Radien nicht ungleich ſeyn. Sind ſie nun gleich, ſo ſind die gleichſchenklichen Dreiecke AMB, BMC,.... kongruent mit A'M'B', B'M'C'....; mithin beide Polygone von gleichem Flächenraume.

Zuſatz. Auch hier iſt die Ordnung der Seiten des einen Polygones unabhängig von der in dem andern.

§. 93.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Polygonen, welche aus n gegebenen Seiten gebildet werden können, hat dasjenige, deſſen Spitzen in einer Kreisperipherie liegen, den größten Flächenraum, welchen die gegebenen Seiten zulaſſen.

Beweis. Es ſeyen (Figur 71.) ABCDEFG und

A'B'C'D'E'F'G' zwei ſphäriſche Polygone, jedes aus den gegebnen Seiten zuſammengeſetzt, von denen das erſtere ſeine Spitzen in der Peripherie eines Kreiſes hat; das andere nicht. Da alle Polygone, welche, aus denſelben Seiten beſtehend, ihre Spitzen in einer Kreisperipherie haben, gleich groß ſind (§. 92.); ſo ſey ABC....G dasjenige unter denſelben, deſſen Seiten in derſelben Ordnung auf einander folgen, wie in dem andern A'B'C'....G'. Man ziehe in ABC...G den Durchmeſſer AI und ziehe DI, EI. An dem zweiten Polygone beſchreibe man das Dreieck D'I'E' = DIE; nämlich D'I' = DI; D'E' = DE; und ziehe A'I'. Von den beiden Abſchnitten A'B'C'D'I' und A'G'F'E'I' kann der Annahme wegen höchſtens einer alle ſeine Spitzen in einem Halbkreiſe haben; dieſer ſey A'B'C'D'I'. Dann iſt A'B'C'D'I' = ABCDI (§. 90.); aber A'G'F'E'I' < AGFEI (§. 91. 90.); mithin A'B'C'D'I'E'F'G' < A...I....G. Nimmt man von dieſen DIE = D'I'E' weg; ſo folgt ABCDEFG > A'B'C'D'E'F'G. — Hat aber keiner von den beiden Abſchnitten des zweiten Polygones alle Spitzen in einem Halbkreiſe, ſo iſt jeder kleiner, als der entſprechende Abſchnitt des erſten Polygones. Um ſo mehr iſt dann dieſes größer als jenes. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes.

Zuſatz. Unter den ſphäriſchen Polygonen, welche aus n gegebenen Seiten gebildet werden können, hat das größte die Eigenſchaft, daß ſeine Spitzen alle in der Peripherie eines Kreiſes liegen. Denn wäre dies nicht, ſo würde das aus denſelben Seiten gebildete, deſſen Spitzen in einer Kreisperipherie liegen, größer als das größte ſeyn.

Von den ſphäriſchen Parallelogrammen.

§. 94.

Erklärung. 1) Das ſphäriſche Parallelogramm iſt dasjenige ſphäriſche Viereck, welches zwiſchen zwei Paar Gegenkreiſen liegt — oder: deſſen Ecken Durch-

ſchnittspunkte zweier Gegenkreiſe mit zwei andern Gegenkreiſen ſind, ohne daß das Viereck in einem dieſer Kreiſe liegt. 2) Das ſphäriſche Trapez aber liegt nur zwiſchen zwei Gegenkreiſen. Von den beiden Seiten, welche Sehnen dieſer Kreiſe ſind, wird eine immer als Grundſeite des Trapezes genommen werden. 3) Jedes andere ſphäriſche Viereck iſt ſphäriſches Trapezoid.

Zuſatz. Bei dem ſphäriſchen Parallelogramme ſind jede zwei einander gegenüber liegende Seiten Sehnen in Gegenkreiſen; bei dem Trapeze nur ein Paar ſolcher Seiten.

§. 95.

Lehrſatz. In jedem ſphäriſchen Parallelogramme ſind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Beweis. Um die Gegenpunkte (Fig. 72.) A, A′ ſeyen die Gegenkreiſe CMND, C′M′N′D′; und um zwei andere Gegenpunkte B, B′ die Gegenkreiſe EMN′F, E′M′NF′ beſchrieben; welche mit den erſteren beiden ſich in den Punkten M, N, M′, N′, ſchneiden, die durch Hauptbogen verbunden, das ſphäriſche Parallelogramm MN M′N′ geben. Daß dieſem die im Lehrſatze behauptete Eigenſchaft zukommt, läßt ſich ſo zeigen.

Von dem Mittelpunkte jedes Kreiſes ziehe man nach den Durchſchnittspunkten deſſelben Radien: AM, AN, BM, BN′, u. ſ. w. Da iſt nun

1) das Dreieck BMA = B′M′A′; weil BM = B′M′; AM = A′M′, als Radien; und AB = A′B′ als Gegenbogen.

Daher iſt Winkel BAM = B′A′M′; ABM = A′B′M′.

2) Dreieck BN′A′ = B′NA, aus den vorhin genannten Gründen.

Daher iſt Winkel A′BN′ = AB′N; und BA′N′ = B′AN.

3) Aus BAM = B′A′M′
und B′AN = BA′N′

folgt BAM + B′AN = B′A′M′ + BA′N′;

und hieraus: MAN = M'A'N', als Supplemente der Summen der vorigen.

Aus MAN = M'A'N' folgt: MN = M'N' (§. 60. Zuſ. 4.) Auf dieſelbe Weiſe findet ſich MN' = M'N.

Zuſatz 1. Nimmt man ſtatt der Hauptbogen MN, MN', M'N', M'N, die gleichbezeichneten Nebenbogen der Gegenkreiſe als Seiten des Viereckes, ſo hat man ein ſphäriſches Parallelogramm, in welchem jede Seite der gegenüberliegenden parallel iſt.

Zuſatz 2. Durch jede Diagonale wird das ſphäriſche Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke getheilt. Denn zieht man in dem Parallelogramm MNM'N' (Fig. 73.) die Diagonale MM'; ſo iſt das Dreieck MN'M' = MNM', weil MN = M'N'; MN' = M'N und MM' = MM' iſt.

Daher ſind die Diagonalwinkel eines ſphäriſchen Parallelogrammes einander gleich; nämlich MN'M' = MNM'; und $v + u = v' + u'$; weil $v = v'$; $u = u'$.

Zuſatz 3. Die beiden Diagonalen des ſphäriſchen Parallelogrammes halbiren ſich gegenſeitig.

Denn wie $u = u'$; iſt auch $y = y'$; und da MN = M'N'; ſo iſt das Dreieck MNO = M'N'O; daher MO = OM'; NO = ON'.

Zuſatz 4. Sind alle Winkel des ſphäriſchen Parallelogrammes einander gleich; ſo ſind auch die Diagonalen gleich.

Denn iſt Winkel M = N; ſo iſt das Dreieck N'MN = MNM'; daher MM' = NN'.

Anmerk. Ein ſolches Parallelogramm entſpricht dem ebenen Rechtecke.

Zuſatz 5. Sind die Winkel aber nicht alle gleich, ſo ſteht dem größern eine größere Diagonale gegenüber.

Denn iſt M > N; ſo iſt NN' = MM' wegen §. 31.

Zuſatz 6. Ein ungleichwinkliches Parallelogramm läßt ſich nicht in einen Kreis einſchreiben.

Denn wäre es möglich, ſo müßte O entweder der Mittelpunkt des umgeſchriebenen Kreiſes ſeyn, oder nicht.

Wäre O der Mittelpunkt, ſo müßten die Diagonalen MM′, NN′ als Durchmeſſer gleich ſeyn; was nicht möglich iſt (Zuſ. 5.). Wäre O ein anderer Punkt des umgeſchriebenen Kreiſes, ſo müßten ſich die Sehnen MM′, NN′ halbiren (Zuſ. 3.); was auch nicht ſeyn kann (§. 64. Zuſ. 4.).

Anmerk. Daher liegt das Sehnenviereck eines ſolchen ſphäriſchen Parallelogrammes nicht in einer Ebne.

Zuſatz 7. Um ein gleichwinkliches ſphäriſches Parallelogramm läßt ſich ein Kreis beſchreiben. Denn in einem ſolchen ſind die Diagonalen gleich, alſo ihr Durchſchnitt O von allen Ecken gleichweit entfernt. Der um O mit dem Radius OM beſchriebene Kreis geht alſo durch alle Ecken des Parallelogrammes.

§. 96.

Lehrſatz. Wenn in einem ſphäriſchen Vierecke die einander gegenüber liegenden Seiten Paarweiſe gleich ſind, ſo iſt das Viereck ein ſphäriſches Parallelogramm.

Beweis. In dem Vierecke (Fig. 73.) MNM′N′ ſey MN = M′N′; MN′ = M′N. Man ziehe die Diagonalen MM′, NN′; ſo iſt das Dreieck MN′M′ = MNM′, weil die Seiten beiderſeits gleich ſind; daher iſt der Flächenraum des Dreiecks MN′M′ die Hälfte des ganzen Vierecks. Eben ſo folgt, daß das Dreieck NN′M′ die Hälfte des Viereckes iſt; und hieraus folgt, daß die Dreiecke MN′M′, NN′M′, welche auf einerlei Grundſeite N′M′ liegen, gleichen Flächeninhalt haben. Solche Dreiecke liegen aber zwiſchen einerlei Gegenkreiſen (§. 80.); daher liegt das Viereck MNM′N′ zwiſchen zwei Gegenkreiſen, deren einer durch M, N; der andere durch M′, N′ geht. Eben ſo folgt aus der Gleichheit der Dreiecke MN′N, MN′M′, daß das Viereck zwiſchen zwei andern Gegenkreiſen liegt, von denen der eine durch M, N′; der andere durch M′, N geht. Alſo iſt das Viereck ein Parallelogramm.

§. 97.

Lehrſatz. Ein ſphäriſches Viereck iſt auch ein Parallelogramm, wenn zwei einander gegenüberliegende Seiten deſſelben gleich und Sehnen zweier Gegenkreiſe ſind.

Beweis. In dem ſphäriſchen Vierecke (Figur 73.) MNM'N' ſey MN=M'N'; und beide Seiten Sehnen zweier Gegenkreiſe, von denen alſo der eine durch M, N; der andere durch M', N' geht.

Zieht man die Diagonalen MM', NN'; ſo haben die Dreiecke MNN' und M'N'M gleichen Flächenraum, weil ſie auf gleichen Grundſeiten, MN, M'N' und zwiſchen einerlei Gegenkreiſen liegen (§. 78. Zuſ. 1.). Betrachtet man nun MN' als die gemeinſchaftliche Grundſeite derſelben Dreiecke, ſo liegen ſie des gleichen Flächenraumes wegen zwiſchen zwei andern Gegenkreiſen, von denen der eine durch M, N', der andere durch M', N geht. Mithin iſt MNM'N' ein ſphäriſches Parallelogramm.

§. 98.

Lehrſatz. Das Polarviereck eines ſphäriſchen Parallelogrammes iſt ſelbſt ein ſphäriſches Parallelogramm.

Beweis. Es ſey (Fig. 74.) MNM'N' ein ſphäriſches Parallelogramm und a, b, c, d ſeyen reſp. die Pole der Seiten MN, M'N', MN', M'N, welche das Polarviereck abcd bilden. Bezeichnet man die Winkel des Parallelogrammes MNM'N' kurz durch die Buchſtaben ihrer Scheitel, ſo iſt $da=\pi-N$; $bc=\pi-N'$; alſo, wegen $N=N'$ (§. 95. Zuſ. 2.), auch $da=bc$; eben ſo folgt aus $M=M'$, daß $ac=db$; hieraus aber nach §. 96, daß abcd ein ſphäriſches Parallelogramm iſt.

Zuſatz 1. Sind in einem ſphäriſchen Vierecke die Dia-

gonalwinkel paarweiſe gleich, ſo iſt das Viereck ein Parallelogramm. Denn iſt $N = N'$; $M = M'$; ſo iſt im Polarvierecke $ad = bc$; $ac = db$; daſſelbe alſo ein Parallelogramm; mithin auch ſein Polarviereck $MNM'N'$ ein Parallelogramm.

Zuſatz 2. In ein ungleichſeitiges ſphäriſches Parallelogramm, d. h. in welchem nicht alle Seiten, ſondern nur je zwei gleich ſind, läßt ſich kein Kreis beſchreiben. Denn wäre es möglich, ſo würde nach §. 71. Zuſ. das Polarparallelogramm — ein ungleichwinkliches — ein in den Polarkreis eingeſchriebenes ſeyn; was nicht möglich iſt (§. 95. Zuſ. 6.).

§. 99.

Lehrſatz. Sphäriſche Parallelogramme auf gleichen Grundſeiten und zwiſchen reſp. gleichen Gegenkreiſen haben gleichen Flächenraum.

Beweis. Iſt in den ſphäriſchen Parallelogrammen (Fig. 75.) $MNM'N'$ und $mnm'n'$ die Grundſeite $M'N' = m'n'$, alſo auch $MN = mn$, ſo iſt das Dreieck $N'M'M = n'm'm$; und $MNM' = mnm'$, weil ſie auf gleichen Grundſeiten und zwiſchen gleichen Gegenkreiſen liegen (§. 78. Zuſ. 1.); daher die Parallelogramme einander gleich.

Zuſatz. Umgekehrt: haben ſphäriſche Parallelogramme gleiche Grundſeiten und gleichen Flächeninhalt, ſo liegen ſie zwiſchen gleichen Gegenkreiſen. Denn dann iſt das Dreieck $MN'M' = mn'm'$, als Hälften gleicher Ganzen; beide liegen alſo zwiſchen gleichen Gegenkreiſen (§. 80. Zuſ.). Die Gegenkreiſe nun, zwiſchen denen das Dreieck $MN'M'$ liegt — $N'M'$ als Grundſeite genommen —, müſſen dieſelben ſeyn, zwiſchen denen das ganze Parallelogramm liegt (§. 79. Zuſ.); eben ſo bei dem andern Parallelogramme $mnm'n'$. Mithin liegen die Parallelogramme zwiſchen gleichen Gegenkreiſen.

§. 100.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Parallelogramm zu konſtruiren, von welchem eine Seite und ein Winkel gegeben iſt und das einem gegebenen Parallelogramme an Flächenraume gleich ſey.

Aufloͤſung. Das gegebene Parallelogramm ſey MNM'N' (Fig. 76.); die gegebene Seite ſey a, der gegebene Winkel w. Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, ſo braucht man nur ein ſolches Dreieck zu konſtruiren. Man ziehe alſo die Diagonale MM'; beſchreibe die Gegenkreiſe des Dreieckes MN'M' — etwa N'M' als Grundſeite genommen — und ziehe nach dem Mittelpunkte C des einen den Radius N'C; ſo iſt der Winkel M'N'C $= \frac{1}{2}$U (§. 75. Zuſ. 2. ꝛc.). Man nehme nun n'm' = a, mache die Winkel m'n'c, n'm'c jeden $= \frac{1}{2}$U; ſo ergiebt ſich der Durchſchnitt c, um deſſen Gegenpunkt c' mit dem Radius n'c man einen Kreis beſchreibe. An n' lege man einen Winkel mn'm' = w, deſſen Schenkel mn' in m den Kreis ſchneide.

Zieht man noch mm'; ſo iſt das Dreieck n'm'm = N'M'M. Das verlangte Parallelogramm ergiebt ſich nun, wenn man von m aus einen Bogen beſchreibt, deſſen Radius = n'm' und der in n den Kreis ſchneidet; dann iſt nmn'm' das geſuchte Parallelogramm.

Beweis. Daß das Dreieck mn'm' = MN'M' iſt, wird ſo wie in §. 85. bewieſen. Das Uebrige folgt aus §. 97. und §. 95. Zuſ. 2.

Zuſatz. Iſt ſtatt des gegebenen Parallelogrammes der Flächenraum des geſuchten blos in Zahlen (nach Graden oder in Bezug auf das Quadrat des Kugelradius als Einheit) beſtimmt; ſo verfährt man wie §. 85. Die gegebene Zahl ſey P; das zu konſtruirende Dreieck mn'm' iſt dann $= \frac{1}{2}$P; woraus U $= \pi - \frac{1}{2}$P folgt.

§. 101.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Parallelogramm zu konſtruiren, von welchem zwei an einander liegende Seiten und der Flächenraum gegeben ſind.

Auflöſung. Die gegebenen Seiten ſeyen a, b; der Flächenraum P. Man verzeichne nach §. 85. ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem Flächenraum $\frac{1}{2}$P und verfahre dann wie im vorigen §.

§. 102.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten das größte ſphäriſche Parallelogramm zu verzeichnen, welches die gegebenen Seiten zulaſſen.

Auflöſung ergiebt ſich aus §. 87.

Zuſatz. Das größte Parallelogramm liegt in einem Kreiſe und iſt ein gleichwinkliches.

§. 103.

Lehrſatz. Wenn in einem ſphäriſchen Trapeze zwei Diagonalen gezogen werden, ſo ſind von den dadurch erzeugten vier Dreiecken diejenigen zwei einander gegenüberliegenden von gleichem Flächenraume, deren keines die Grundſeite des Trapezes als Seiten hat.

Beweis. Das ſphäriſche Trapez ABCD (Fig. 77.) habe CD als Grundſeite. Die Gegenkreiſe, zwiſchen denen es liegt, gehen alſo der eine durch C, D; der andere durch A, B. Zieht man die Diagonalen AD, CB, welche in E ſich ſchneiden, ſo iſt der Flächenraum ACD = BCD; daher, nach

Wegnahme des gemeinſchaftlichen ECD, das Dreieck AEC = BED.

§. 104.

Lehrſatz. Zwei ſphäriſche Trapeze haben gleichen Flächenraum, wenn ſie zwiſchen reſp. gleichen Gegenkreiſen und auf gleichen Grundſeiten liegen, und wenn die den Grundſeiten gegenüberliegenden den Seiten gleich ſind.

Beweis. Liegen die Trapeze ABCD (Fig. 77.) und A'B'C'D' (Fig. 78.) zwiſchen gleichen Gegenkreiſen; ſind ihre Seiten CD, C'D' einander gleich und auch AB = A'B'; ſo ſind die durch die Diagonalen AD, A'D' gebildeten Dreiecke paarweiſe dem Flächeninhalte nach gleich; nämlich ACD = A'C'D'; ABD = A'B'D' (§. 78. Zuſ. 1.); daher die Trapeze von gleichen Flächeninhalte.

Zuſatz. Wenn zwei dem Flächenraume nach gleiche ſphäriſche Trapeze auf gleichen Grundſeiten liegen und auch die den Grundſeiten gegenüberſtehenden Seiten einander gleich ſind; ſo liegen die Trapeze zwiſchen gleichen Gegenkreiſen.

Konſtruktion regelmäßiger Polygone.

§. 105.

Aufgabe. Ein gleichſchenkliches Dreieck zu konſtruiren, deſſen Grundſeite nebſt dem gegenüberliegenden Winkel gegeben iſt.

Auflöſung. Die Grundſeite ſey a, der ihr gegenüberliegende Winkel w. Man konſtruire eine Spindel (Fig. 79.) CFF'C, deren Winkel FCF' = a iſt und halbire ſie durch einen Hauptkreis CGC', deſſen Pol D ſey. Um D beſchreibe

man mit dem Radius $= \frac{1}{2}(\pi - a)$ einen Kreis, der in B den Bogen CF ſchneide; ziehe DB, der verlängert auf CF' den Durchſchnitt A giebt; — ſo iſt ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Da D der Pol von CGC' iſt, ſo iſt $DE = \frac{\pi}{2}$; und ſteht auf CE ſenkrecht. Die rechtwinklichen Dreiecke CEB, CEA ſind einander gleich (§. 22.); daher $AC = BC$, alſo CAB ein gleichſchenkliches Dreieck; ferner iſt $AE = EB$ und $EB = ED - BD = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\pi - a) = \frac{1}{2}a$; mithin $AB = a$.

Anmerk. Die Aufgabe iſt zweideutig, denn das gleichſeitige Dreieck ABC' erfüllt dieſelben Bedingungen. Sie wird aber beſtimmt, wenn bekannt iſt, ob die Schenkel des Dreiecks kleiner oder größer als ein Quadrant ſeyn ſollen.

Zuſatz. Der gegebene Winkel muß größer als die gegebene Grundſeite ſeyn. Denn beſchreibt man um C als Pol den Hauptkreis DGD', der in F, F' die Schenkel der Spindel ſchneidet; ſo iſt DGD' ſenkrecht auf beiden Schenkeln, und DF' wie $DA > \frac{\pi}{2}$; daher $DF' > DA$; und $DF' < DB$; daher $FF' > AB$. Der Winkel FCF' aber iſt $= FF'$; alſo muß $w > a$ ſeyn; wenn die Schenkel des geſuchten Dreieckes nicht etwa Quadranten ſind.

§. 106.

Aufgabe. Ein gleichſchenkliches ſphäriſches Dreieck zu konſtruiren, deſſen Flächenraum und der Winkel an der Spitze gegeben ſind.

Auflöſung. Der gegebene Flächenraum ſey $= T$; der Winkel an der Spitze $= w$. Bezeichnet man die Winkel an der Grundſeite des geſuchten Dreieckes mit A, B, die einander gleich ſind, ſo iſt $T = A + B + w - \pi = 2A + w - \pi$; daher $A = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}w$. Da alſo alle Winkel des Drei-

eckes hiedurch gegeben ſind, ſo läßt ſich daſſelbe nach §. 41. I. konſtruiren.

Eine andere Auflöſung, die auch an dem angeführten Orte mit einigen Modificationen ſich anwenden läßt, mag zum Ueberfluſſe hier noch folgen.

Man nehme drei auf einander ſenkrechte Hauptkreiſe (Fig. 80.) PQP'Q', QRQ', PRP'; und beſchreibe um die Gegenpunkte Q, Q' mit dem Radius $=\frac{1}{2}w$ Gegenkreiſe, die in q, q' ſich mit QRQ' ſchneiden. Um q, q' als Pole beſchreibe man die Hauptkreiſe PMP', PNP'; um P beſchreibe man mit dem Radius $=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$ einen Kreis, der in L den um Q beſchriebenen ſchneide; führe von Q durch L einen Hauptkreis QLQ', der in A und B die Spindel PMNP ſchneide; — ſo iſt PAB das verlangte Dreieck.

Beweis. Nimmt man $Rp=CP$, ſo iſt $pC=RP$ $=\frac{\pi}{2}$; alſo, da PRP' und QCQ' auf einander ſenkrecht ſind (§. 11. Zuſ. 5.), iſt p der Pol von QCQ' (§. 8, Zuſ. 4. 2.). Zieht man den Bogen pq, ſo iſt das rechtwinkliche Dreieck $pRq=PCL$, weil $Rp=PC$ (per Constr.) und $Rq=CL$ als Komplemente von Qq, QL; daraus folgt: $pq=PL=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$. Da p, q die Pole der Kreiſe QCQ, PMP' ſind, ſo iſt die Polentfernung pq dem Supplemente des Winkels QAP', alſo $pq=PAB=A=\frac{1}{2}(\pi+T-w)$. Eben ſo führt die Gleichheit der Dreiecke pRq' und PCL auf $PBA=\frac{1}{2}(\pi+T-w)$.

Endlich, da $QR=qM=\frac{\pi}{2}$, alſo $RN=qQ=\frac{1}{2}w$, mithin $MN=w$, und $APB=MN$ (§. 11. Zuſ. 6.) iſt; — ſo iſt der Winkel $APB=w$. Das Dreieck PAB iſt alſo ein gleichſchenkliches, deſſen Winkel an der Spitze $P=w$ und deſſen Flächenraum $P+A+B-\pi=w+\frac{1}{2}(\pi+T-w)+\frac{1}{2}(\pi+T-w)-\pi=T$ iſt.

Zuſatz. Der Bogen mn, der von beiden Nebenkreiſen eingeſchloſſene Theil, des durch ihre Mittelpunkte P, Q ge-

henden Hauptkreiſes, iſt dem Flächenraume $\frac{1}{2}T$ gleich. Denn es iſt $Pn = \frac{1}{2}(\pi + T - w)$; und $Qm = \frac{1}{2}w$, daher $Pn + Qm = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T$; d. i. $\frac{1}{2}\pi + mn = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T$; daher $mn = \frac{1}{2}T$.

§. 107.

Aufgabe. Ein regelmäßiges ſphäriſches Polygon zu konſtruiren

1) wenn deſſen Seitenzahl und Umfang;
2) wenn die Seitenzahl und der Flächenraum deſſelben gegeben iſt.

Auflöſung. Da jedes regelmäßige Polygon von dem Mittelpunkte des ein- oder umgeſchriebenen Kreiſes aus in kongruente gleichſeitige Dreiecke zerlegt werden kann, deren gemeinſchaftliche Spitze in jenem Mittelpunkte liegt und deren Grundſeiten die Seiten des Polygones ſind; ſo braucht man nur ein ſolches Dreieck zu konſtruiren, um das geſuchte Polygon zu finden.

1) Für die erſte Aufgabe ſey nun n die Zahl der Seiten des Polygones und der Umfang $= V$.

Das Polygon beſteht alſo aus n gleichſchenklichen Dreiecken, jedes mit der Grundſeite $= \frac{V}{n}$ und dem Winkel an der Spitze $= \frac{2\pi}{n}$. Nach §. 105. konſtruire man alſo ein gleichſchenkliches Dreieck mit der Grundſeite $\frac{V}{n}$ und dem Winkel an der Spitze $\frac{2\pi}{n}$. Mit einem Schenkel dieſes Dreieckes als Radius beſchreibe man dann einen Kreis und trage die Grundſeite $\frac{V}{n}$ als Sehne in demſelben nmal ein; ſo hat man das geforderte Polygon.

2) Für die zweite Aufgabe ſey wieder n die Zahl der Seiten und der Flächenraum des Polygones $= P$; ſo iſt

$\frac{P}{n}$ der Flächeninhalt und $\frac{2\pi}{n}$ der Winkel an der Spitze eines jeden der gleichſchenklichen Dreiecke, aus denen das Polygon beſteht. Man konſtruire nach §. 106. ein ſolches Dreieck und verfahre dann wie vorher.

Zuſatz. Von den beiden Radien (Fig. 80.) QL, PL, welche zur Konſtruktion eines ſolchen Dreieckes in §. 106. gebraucht werden, iſt der eine, nämlich QL, dem halben Zentriwinkel, der andere, PL, dem halben Polygonwinkel des zu konſtruirenden Polygones gleich. Denn QL iſt $=\frac{1}{2}w$ (§. 106.) und w iſt hier der Zentriwinkel des Polygones. Der Radius PL war dort $=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$, gleich dem Winkel an der Grundſeite, der in den gleichſchenklichen Dreiecken des Polygones dem halben Polygonwinkel gleich iſt nach §. 72. Zuſ.

Von den ſphäriſchen Netzen.

§. 108.

Erklärung. Ein ſphäriſches Netz iſt ein die ganze Kugelfläche einnehmendes Syſtem von ſphäriſchen Polygonen (Dreiecke nicht ausgeſchloſſen), die lauter auswärts gehende (konkave) Winkel haben, und die ſo zuſammenhängen, daß jede Seite eines Polygones zugleich Seite eines angrenzenden iſt.

Die Seiten der das Netz bildenden Polygone heißen auch die Seiten des Netzes; die Punkte aber, in welchen ſolche Seiten zuſammentreffen, mögen die Scheitel des Netzes genannt werden.

Zuſatz. Aus der Erklärung folgt, daß in jedem Scheitel des Netzes mindeſtens drei Seiten zuſammentreffen müſſen; weil zwei Seiten allein, entweder einen überſtumpfen (konvexen), oder zwei Winkel, von denen jeder zwei Rechte

beträgt, bilden würden, was bei Polygonen mit lauter auswärts gehenden Ecken nicht möglich iſt.

Nach der Zahl der in einem Scheitel ſich vereinigenden Seiten iſt er ein dreiſeitiger, vierſeitiger u. ſ. w., eben ſo, wie die Figuren des Netzes drei-, vierſeitig u. ſ. w. ſeyn können.

§. 109.

Lehrſatz. In jedem ſphäriſchen Netze iſt die Zahl der Figuren mit der Zahl der Scheitel zuſammengenommen um zwei größer, als die Zahl der ſämmtlichen Seiten.

Beweis. Es ſey p die Zahl der Figuren; p′ die der Scheitel; l die Zahl der Seiten des Netzes.

Es iſt alſo zu beweiſen, daß ſtets $p + p' = l + 2$ ſey. Zu dem Ende ſeyen die Flächenräume der Figuren des Netzes durch $P', P'', P''', \ldots\ldots P^p$; die Summen ihrer Winkel bezüglich durch $S', S'', S''', \ldots\ldots S^p$; und die Zahl der Seiten eines jeden durch $N', N'', N''' \ldots\ldots N^p$ dargeſtellt; wo, wie geſagt, p die Zahl der Figuren iſt. Nach §. 51. iſt nun

$$P' = S' - (N' - 2)\pi;$$
$$P'' = S'' - (N'' - 2)\pi;$$
$$P''' = S''' - (N''' - 2)\pi;$$
$$\vdots$$
$$P^p = S^p - (N^p - 2)\pi;$$ daher, wenn man ſummirt

$$(P' + P'' + \ldots + P^p) = (S' + S'' + \ldots + S^p) - (N' + N'' + \ldots N^p)\pi + 2p\pi;$$

Nun iſt $P' + P'' + \ldots + P^p$ der Kugelfläche gleich, alſo $= 4\pi$; $S' + S'' + S''' + \ldots\ldots + S^p$ iſt die Summe aller Winkel des Netzes, welche um die Scheitel deſſelben vertheilt liegen. Da die Summe der um einen Punkt liegenden Winkel immer $= 2\pi$, und die Zahl dieſer Punkte dieſelbe der Scheitel, alſo $= p'$ iſt; ſo iſt $S' + S'' + \ldots + S^p = 2p'\pi$. Endlich iſt die

Summe $N' + N'' + \ldots + N^p$ das Doppelte der Seitenzahl l; weil jede Seite des Netzes zu zwei Polygonen gehörig bei jedem beſonders gezählt worden iſt; jede alſo zweimal vorkommt. Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in die obige Gleichung, ſo erhält man

$$4\pi = 2p'\pi - 2l\pi + 2p\pi;$$

oder, wenn mit 2π dividirt wird:

$$2 = p' - 1 + p; \text{ oder}$$

$$p + p' = l + 2.$$

Zuſatz. Da $p + p' - l = 2$ ſeyn muß, ſo können p, p', l nicht zugleich ungrade Zahlen ſeyn; auch können nicht zwei derſelben grade, die dritte ungrade, mithin nur entweder alle drei grade, oder eine grade und zwei ungrade ſeyn.

§. 110.

Aus der allgemeinen Gleichung $p + p' = l + 2$; oder $p + p' - l - 2 = a$; ergeben ſich wichtige Folgerungen über die Natur der ſphäriſchen Netze, zu deren Entwickelung wir folgende Gleichung zu Hülfe nehmen.

Die Zahl der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. ſ. w. ſey reſp. durch a, b, c, ...; die Zahl der dreiſeitigen, vierſeitigen, fünfſeitigen u. ſ. w. Scheitel reſp. durch a', b', c', ... bezeichnet. Dann iſt

$$p = a + b + c + d + \ldots;$$

$$p' = a' + b' + c' + \ldots;$$

Ferner iſt $2l = 3a + 4b + 5c + \ldots$; und auch

$$2l = 3a' + 4b' + 5c' + \ldots;$$

Denn da jedes Dreieck 3, jedes Viereck 4, u. ſ. w. Seiten hat, und a Dreiecke, b Vierecke u. ſ. w. im Netze ſind; ſo erhält man $3a + 4b + 5c + \ldots$ Seiten, wenn jede bei jedem Polygone, zu dem ſie gehört, gezählt wird. Jede kommt aber alsdann zweimal vor; woraus ſich die Gleichung ergiebt. Eben ſo bei den Scheiteln. Es ſind a' Scheitel mit 3, b' mit 4, c' mit 5 u. ſ. w. Seiten; zuſammen alſo $3a' +$

$4b' + 5c' + \ldots$ Seiten, von denen aber jede zweimal gezählt iſt, weil ſie ihrer beiden Endpunkte wegen, zu zwei Scheiteln gehört.

Der Abkürzung wegen ſey $b + 2c + 3d + \ldots.$ durch u, und ebenſo $b' + 2c' + 3d' + \ldots.$ durch u' bezeichnet. Dann iſt

$$2l = 3p + u;$$
$$2l' = 3p' + u'.$$

Durch dieſe Gleichungen läßt ſich aus der Hauptgleichung $p + p' - l - 2 = O$; l auf zweierlei Art eliminiren. Die Hauptgleichung nämlich mit 2 multiplicirt und dazu erſt die obige: $2l - 3p - u = O$ addirt, giebt:

$$2p' - p - u - 4 = O;$$

dann dazu die andere: $2l - 3p' - u' = O$ addirt, giebt:

$$2p - p' - u' - 4 = O.$$

Wir haben alſo die Gleichungen:

I) $p + p' - l - 2 = O$;
IIa) $3p - 2l + u = O$;
IIb) $3p' - 2l + u' = O$;
IIIa) $2p - p' - u' - 4 = O$;
IIIb) $2p' - p - u - 4 = O$;

Zwei neue Gleichungen ergeben ſich aus IIa) und IIIb) wenn aus denſelben p; und aus IIb) und IIIa) wenn p' eliminirt wird. Nämlich, IIIb) mit 3 multiplicirt und dazu IIa) addirt, endlich mit 2 dividirt, giebt:

IVa) $3p' - l - u - 6 = O$;

Aus den andern beiden Gleichungen folgt:

IVb) $3p - l - u' - 6 = O$;

Man wird in allen dieſen Gleichungen die Symmetrie bemerken, welche hinſichtlich der p, p' in denſelben ſtattfindet. Die Doppelgleichungen in II), III), IV) ſind in dieſer Rückſicht alternativ; eine geht in die andere über, wenn p mit p' verwechſelt wird; mit der einen iſt alſo die andere gegeben. Die Hauptgleichung I) kehrt in ſich ſelbſt zurück, wenn man p und p' vertauſcht. Dies läßt auf merkwürdige Beziehun-

gen zwiſchen den Figuren und Scheiteln des ſphäriſchen Netzes ſchließen.

§. 111.

Die Gleichung $2l = 3a + 4b + 5c + \ldots.$ zeigt, daß $(a+c+e+\ldots)$ eine grade Zahl ſeyn muß.

Denn da $2l$ eine grade Zahl iſt, ſo iſt es $(3a+4b+5c+\ldots.)$; wird hievon die grade Zahl $2a+4b+4c+6d+6e+\ldots.)$ abgezogen, ſo iſt der Reſt: $(a+c+e+\ldots.)$ eine grade Zahl.

Und da $p=(a+c+e+\ldots)+(b+d+f+\ldots)$ iſt; ſo iſt $(b+d+f+\ldots)$ grade oder ungrade, je nachdem p es iſt.

Die Gleichung $2l=3a'+4b'+5c'+\ldots.$ ergiebt ebenfalls, daß $(a'+c'+e'+\ldots.)$ ſtets eine grade, $(b'+d'+f'+\ldots)$ aber grade, oder ungrade iſt, wie p'. Dies in Worten ausgedrückt, heißt: In jedem ſphäriſchen Netze iſt die Summe der Polygone von ungrader Seitenzahl ſtets eine grade Zahl; eben ſo iſt die Summe der Scheitel von ungrader Seitenzahl immer eine grade Zahl.

Aus der Gleichung $3p-2l+u=O$ (IIa.) folgt: daß $2l \geqq 3p$ iſt; das Zeichen $=$ findet nämlich ſtatt, wenn $u=O$ d. h. wenn das Netz nur Dreiecke enthält. Die Gleichung $3p-l-u'-6=O$; zeigt, daß $l<3p$, oder $2l<6p$ iſt. Es hat alſo $2l$ ſeine möglichen Werthe zwiſchen $3p$ und $6p$; wo $3p$ ſelbſt das Minimum iſt. Die Gleichungen IIb) und IVa) geben ebenfalls $2l \geqq 3p'$; und $2l<6p'$. Dieſen Grenzen gemäß können für $2l$ die Gleichungen geſetzt werden:

α) $2l=3p+x$; $\quad\alpha'$) $2l=3p'+x'$;

β) $2l=4p+x$; $\quad\beta'$) $2l=4p'+x'$;

γ) $2l=5p+x$; $\quad\gamma'$) $2l=5p'+x'$;

wo x, ſo wie x' poſitive ganze Zahlen, die auch Null, je-

doch, wenigſtens in den Gleichungen γ, γ', kleiner als p, p′ ſind.

In den Gleichungen α, β, γ laſſen ſich die Figuren und Seiten durch die Scheitel ausdrücken, vermittelſt der Gleichungen IIb) und IIIa), welche

$$2l = 3p' + u' \text{ und}$$
$$2p = p' + u' + 4 \text{ geben.}$$

Und eben ſo laſſen ſich in α', β', γ', die Seiten und Scheitel durch die Figuren ausdrücken durch die Gleichungen

$$2l = 3p + u \text{ (IIa.); und}$$
$$2p' = p + u + 4 \text{ (IIIb.).}$$

1) Dieſe Subſtitution auf die Gleichung (α) angewandt, verwandelt ſie in

$$3p' - u' = 12 + 2x;$$

welche, wenn für p′ und u′ ihre Werthe durch a′, b′, c′, ... ausgedrückt werden, die Form annimmt:

$$\text{A)}\ 3a' + 2b' + c' = 12 + 2x + e' + 2f' + 3g' + \ldots;$$

welche für jedes Netz gültig iſt. Da hier x, e′, f′, ... nicht negativ ſeyn können; ſo folgt, daß a′, b′, c′ nicht zugleich Null ſeyn können, d. h. daß in jedem Netze dreiſeitige, oder vierſeitige, oder fünfſeitige Scheitel ſeyn müſſen. Der bemerkenswerthe Umſtand, daß in dieſer Gleichung d′ verſchwindet, zeigt, daß die Zahl der ſechsſeitigen Scheitel ohne Einfluß auf obige Relation zwiſchen den übrigen Scheiteln iſt.

Wird aus der Gleichung α' durch IIa) und IIIb), l und p′ eliminirt, ſo erhält man

$$\text{B)}\ 3a + 2b + c = 12 + 2x' + e + 2f + 3g + \ldots;$$

die, der Gleichung A) ganz ähnlich, daſſelbe Geſetz für die Figuren ausſpricht. Jedes Netz muß Dreiecke, Vierecke, oder Fünfecke enthalten. Die Zahl der Sechsecke hat keinen Einfluß auf obige Beziehung zwiſchen den übrigen Polygonen.

Das einfachſte Netz iſt dasjenige, deſſen Figuren und Scheitel die wenigſten, alſo 3, Seiten haben. Setzt man

alſo, dies zu finden, in den Gleichungen (A), (B) außer a und a' alles Uebrige $=O$, ſo hat man $3a'=12$; und $3a=12$; alſo $a'=4$; $a=4$; *das einfachſte Netz beſteht alſo aus 4 Dreiecken und 4 dreiſeitigen Scheiteln.*

Iſt in (A) $x=O$; ſo bezieht ſie ſich auf Netze mit lauter Dreiecken. Denn alsdann iſt in (α) $2l=3p$; und nur bei lauter Dreiecken kann die doppelte Seitenzahl das Dreifache der Figurenzahl ſeyn.

Eben ſo gilt die Gleichung (B) für Netze mit lauter dreiſeitigen Scheiteln, wenn $x'=O$ iſt.

2) Wird aus den Gleichungen (β) und (β'), aus erſterer l, p, aus letzterer l, p', durch (II) und (III) eliminirt; ſo erhält man

$$\text{C)}\quad a'=8+x+c'+2d'+3e'+\dots\dots$$
$$\text{D)}\quad a=8+x'+c+2d+3e+\dots\dots;$$

von denen (C) für Netze mit vier- und mehrſeitigen Figuren gilt, wenn x nicht O iſt. Denn da die Gleichung (β) $2l=4p+x$ vorausgeſetzt wird, ſo kann das Netz nicht lauter Vierecke enthalten, weil in dem Falle $2l=4p$ ſeyn muß; noch weniger kann es blos Vierecke und Dreiecke enthalten. Die Gleichung (D) gilt aus ähnlichen Gründen für Netze mit vier- und mehrſeitigen Scheiteln. Das erſtere Netz muß wenigſtens 8 dreiſeitige Scheitel; das andere wenigſtens 8 Dreiecke enthalten.

Da hier in (C) kein b', in (D) kein b iſt; ſo gilt hier von den vierſeitigen Figuren und Scheiteln, was oben von den ſechsſeitigen bemerkt wurde.

3) Die Gleichungen (γ), (γ') endlich geben nach der oben angedeuteten Elimination:

$$\text{E)}\quad a'=20+2x+2b'+5c'+8d'+\dots\dots;$$
$$\text{F)}\quad a=20+2x'+2b+5c+8d+\dots\dots;$$

Die Gleichung (E) für Netze mit fünf- und mehrſeitigen Figuren; die andern für Netze mit fünf- und mehrſeitigen Scheiteln; die erſteren Netze mit wenigſtens 20 dreiſeitigen Scheiteln; die anderen mit wenigſtens 20 Dreiecken.

§. 112.

Wir wollen nun einige ſpeciellere Fälle näher betrachten, die Fälle nämlich, wenn das Netz lauter Dreiecke, Vierecke, oder Fünfecke mit drei-, oder vier-, oder fünfſeitigen Scheiteln enthält.

Setzt man in den Gleichungen (A), (B), in der erſten $x=u$, in der zweiten $x'=u'$, wobei die Allgemeingültigkeit nicht beſchränkt wird, weil die Gleichungen (α), (α') dadurch in die allgemeinen

$$21=3p+u\,(\text{II b.}); \text{ und } 21=3p'+u'\,(\text{II a.})$$

übergehen —; ſo erhält man die Gleichungen

$$(A)\ 3a'+2b'+c'-(e'+2f'+3g'+\ldots\ldots)=12+2b+4c+6d+\ldots;$$

$$(B)\ 3a+2b+c-(e+2f+3g+\ldots)=12+2b'+4c'+6d'+\ldots;$$

Da in (A) kein d', in (B) kein d iſt, ſo können wir mit den vorhergenannten Figuren und Scheiteln noch ſechsſeitige verbinden. Es habe alſo das Netz

1, lauter Dreiecke und Sechsecke; und zwar

a) in drei- und ſechsſeitigen Scheiteln. Dann erhält man aus (A) $3a'=12+6d$;
aus (B) $3a=12+6d'$;
alſo $a'=4+2d$; $a=4+2d'$;
Die Zahl der Dreiecke iſt alſo immer um 4 größer, als die doppelte Zahl der ſechsſeitigen Scheitel; die Zahl der dreiſeitigen Scheitel um 4 größer, als das Doppelte der Sechsecke. Je nachdem d, oder d' oder beide zugleich Null ſind, ergiebt ſich das Reſultat:

Ein Netz mit lauter Dreiecken in drei- und ſechsſeitigen Scheiteln, hat nur 4 dreiſeitige Scheitel;

ein Netz mit lauter dreiſeitigen Scheiteln in Dreiecken und Sechsecken hat nur 4 Dreiecke; endlich:

ein Netz mit lauter Dreiecken in dreiſeitigen Scheiteln, hat nur 4 Dreiecke und 4 Scheitel.

b) Die Dreiecke und Sechsecke hängen in vier- und ſechsſeitigen Scheiteln zuſammen.

Dann giebt (A).......$2b' = 12 + 6d$;
und (B).......$3a = 12 + 2b' + 6d'$;
daher.........$3a = 24 + 6d + 6d'$;
oder........... $a = 8 + 2(d + d')$;
wozu aus (A) folgt: $b' = 6 + 3d$;

Die Zahl der vierſeitigen Scheitel iſt alſo um 6 größer, als das Dreifache der Sechsecke; die Dreiecke aber um 8 größer, als das Doppelte der ſechsſeitigen Figuren und Scheitel zuſammen.

Soll das Netz keine Sechsecke enthalten, alſo $d = O$ ſeyn, ſo iſt $a = 8 + 2d'$; $b' = 6$, d. h. ein Netz mit lauter Dreiecken in vier- und ſechsſeitigen Scheiteln hat immer nur 6 vierſeitige Scheitel. Iſt auch $d' = O$; ſo iſt $a = 8$; $b' = 6$; d. h. ein Netz mit lauter Dreiecken in vierſeitigen Scheiteln hat 8 Dreiecke und 6 Scheitel.

c) Das Netz enthalte Dreiecke und Sechsecke in fünf- und ſechsſeitigen Scheiteln; ſo wird

(A).......$c' = 12 + 6d$;
(B).......$3a = 12 + 4c' + 6d'$;

alſo, wenn aus (A) der Werth von $4c'$ in (B) ſubſtituirt und mit 3 dividirt wird:

$$a = 20 + 8d + 2d';$$

Iſt hier $d = O$; ſo iſt $c' = 12$; d. h. in einem Netze von lauter Dreiecken in fünf- und ſechsſeitigen Scheiteln ſind immer grade 12 fünfſeitige Scheitel. Setzt man auch $d' = O$; ſo iſt $c' = 12$; $a = 20$; d. h. ein Netz aus lauter Dreiecken und fünfſeitigen Scheiteln hat 20 Dreiecke und 12 Scheitel.

2) Das Netz beſtehe aus Vierecken und Sechsecken und zwar

a) in drei- und ſechsſeitigen Scheiteln. Dieſer Fall er-

giebt ſich aus (1, b). Verwechſelt man dort die Scheitel mit den Figuren, ſo hat man: .... $b = 6 + 2d'$;

$a' = 8 + 2(d + d')$;

Was dort (1, b) von den Figuren gilt, gilt hier von den Scheiteln, und umgekehrt, alſo:

Ein Netz mit lauter Vierecken und Sechsecken und dreiſeitigen Scheiteln, hat ſtets 6 Vierecke;

ein Netz mit lauter Vierecken und dreiſeitigen Scheiteln hat 6 Vierecke und 8 Scheitel.

Netze aus lauter Vierecken und Sechsecken mit lauter vier- und ſechsſeitigen Scheiteln ſind nicht möglich; eben ſo wenig können Vierecke und Sechsecke mit lauter fünf- und ſechsſeitigen Scheiteln ein Netz bilden. (Da in den Gleichungen A und B, dort d', hier d ausgeſchloſſen iſt, ſo gelten die ſo eben ausgeſprochenen Sätze auch, wenn die Sechsecke und ſechsſeitigen Scheitel weggelaſſen werden.) Denn in dem erſteren Falle muß $2l = 4p + x$ ſeyn, was nach §. 111. 2., wenigſtens 8 Dreiecke bedingt. In dem zweiten Falle wird $2l = 5p + x$ vorausgeſetzt, wodurch mindeſtens 20 Dreiecke bedingt werden (§. 111. 3.).

3) Das Netz enthalte Fünfecke und Sechsecke und zwar in drei- und ſechsſeitigen Scheiteln. Auch dieſer Fall iſt eine Umkehrung des in (1. c) abgehandelten. Man ſetze dort Scheitel für Figuren und dieſe für jene, ſo hat man:

$c = 12 + 6d'$;

$a' = 20 + 8d' + 2d$;

Daher die Umkehrungen jener Sätze:

in einem Netze mit lauter Fünfecken und Sechsecken in dreiſeitigen Scheiteln ſind ſtets 12 Fünfecke;

in einem Netze mit lauter Fünfecken und dreiſeitigen Scheiteln ſind 12 Fünfecke und 20 Scheitel.

Auch hier iſt die Annahme, daß die Fünfecke und Sechsecke in vier- und ſechsſeitigen Scheiteln, oder in fünf- und ſechsſeitigen Scheiteln zuſammenhängen, unſtatthaft; auch wenn die ſechsſeitigen Scheitel weggelaſſen werden. Denn auch hier bedingen die zum Grunde liegenden Vorausſetzungen: $2l=4p'+x'$; $2l=5p'+x'$ das einemal mindeſtens 8, das andere Mal wenigſtens 20 dreiſeitige Scheitel (§. 111. 2. 3.).

Setzt man auch hier d, $d'=O$, ſo ergiebt ſich die Unmöglichkeit eines Netzes aus lauter Fünfecken in lauter vier- oder fünfſeitigen Scheiteln.

§. 113.

Erklärung. Verwandte Netze heißen diejenigen ſphäriſchen Netze, welche in der Beziehung zu einander ſtehen, daß die Figuren und Scheitel des einen (ihren Gattungen und ihrer Anzahl nach) auf dieſelbe Weiſe vorhanden ſind, wie umgekehrt die Scheitel und Figuren des andern.

Oder: wenn das eine Netz a Dreiecke, b Vierecke, c Fünfecke u. ſ. w. und a' dreiſeitige, b' vierſeitige, c' fünfſeitige u. ſ. w. Scheitel enthält; das andere Netz aber a' Dreiecke, b' Vierecke, c' Fünfecke u. ſ. w. und a drei-, b vier-, c fünfſeitige u. ſ. w. Scheitel hat; ſo ſind dieſe Netze verwandte.

§. 114.

Lehrſatz. Jedes ſphäriſche Netz hat ein verwandtes Netz.

Beweis. Für beſondere Fälle iſt der Beweis durch die in den vorigen Paragraphen aufgeſtellten Netze ſchon geführt. Allgemein folgt er aus den §. 110. und §. 111. entwickelten allgemeinen Gleichungen, welche in Bezug auf die Figuren und Scheitel jedes Netzes einerlei Bedingungen ausſprechen. Iſt nämlich ein Netz mit gewiſſen Figuren und Schei-

teln möglich, ſo ſind damit jene Gleichungen für dieſen Fall durchgängig beſtimmt. Verwechſelt man nun die Scheitel mit den Figuren, ſo kehren in den dadurch erhaltenen Gleichungen jene nur zurück, wodurch die Gültigkeit der durch die Verwechſelung entſtandenen Gleichungen erhellt, aus der ſich auf die Möglichkeit des dadurch bezeichneten Netzes ſchließen läßt.

Durch geometriſche Betrachtung ergiebt ſich die Richtigkeit des Satzes leicht auf folgende Weiſe.

Man ſetze in jedem Polygone des gegebenen Netzes einen Punkt und verbinde denſelben durch Bogen mit den Punkten der anliegenden Figuren; ſo hat man

1) ein zweites Netz mit ſo viel Scheiteln, als das gegebene Figuren enthält.

Da nun an jedes mſeitige Polygon des gegebenen Netzes ſich m andere Polygone anſchließen, ſo gehen m Bogen von dem in jenem Polygone feſtgeſetzten Punkte oder Scheitel aus, der alſo ein mſeitiger iſt. Daher hat

2) das zweite Netz eben ſolche Scheitel, wie das gegebene Figuren hat, in gleicher Anzahl und Gattung.

Da endlich in jedem mſeitigen Scheitel des gegebenen Netzes m Figuren deſſelben zuſammenſtoßen und aus jeder von dem darin feſtgeſetzten Punkte ein Bogen nach den angrenzenden geht; ſo wird ein ſolcher Scheitel von einem mſeitigen Polygone des zweiten Netzes eingeſchloſſen. Mithin entſpricht jedem mſeitigen Scheitel des gegebenen ein mſeitiges Polygon des zweiten Netzes. Daher enthält

3) das zweite Netz eben ſolche Figuren, wie das erſte Polygone, in gleicher Anzahl und Gattung.

Hieraus folgt aber, daß das zweite Netz ein verwandtes des erſten iſt.

Zuſatz. Jedes Netz hat mehrere verwandte Netze, die ſich unter einander durch die Größe der Winkel und Seiten ihrer Figuren unterſcheiden. Denn die Lage der in vorſtehendem Beweiſe geſetzten Punkte, welche die Scheitel eines

verwandten Netzes abgeben, iſt im Allgemeinen beliebig, daher die Winkel und Seiten des davon abhängigen Netzes veränderlich.

§. 115.

Erklärung. Ein regelmäßiges Netz iſt dasjenige, in welchem ſowohl alle Figuren regelmäßig und von einerlei Gattung ſind, als auch die Scheitel.

Ein regelmäßiger Scheitel iſt nämlich derjenige, der, wie das regelmäßige Polygon, gleiche Winkel und gleiche Seiten hat.

§. 116.

Lehrſatz. Wenn ein ſphäriſches Netz aus regelmäßigen Polygonen einer und derſelben Gattung beſteht, ſo iſt es ein regelmäßiges.

Beweis. Sind die Polygone eines Netzes alle regelmäßig, ſo ſind alle Seiten des Netzes unter ſich gleich, weil jedes Polygon mit jedem angrenzenden eine Seite gemein hat. Auch ſind die Winkel aller Polygone einander gleich; denn jedes regelmäßige Polygon wird durch die von dem Mittelpunkte deſſelben nach den Ecken gezogenen Bögen in gleichſchenkliche Dreiecke zerlegt, welche in allen Polygonen des Netzes gleiche Grundſeiten, gleiche Winkel an der Spitze und gleichartige Schenkel (nämlich $<\frac{\pi}{2}$) haben, die alſo einander gleich ſind (§. 105.). Aus der Gleichheit der Winkel an den Grundſeiten aller dieſer Dreiecke, folgt die Gleichheit der Winkel aller Polygone des Netzes, von denen jene Winkel Hälften ſind.

Da demnach alle Seiten, ſo wie alle Winkel des Netzes gleich ſind, ſo ſind alle Scheitel deſſelben regelmäßige und — weil die Winkel um jeden Scheitel vier Rechte betragen —

auch von einerlei Gattung. Daher iſt das Netz ein regelmäßiges.

§. 117.

Lehrſatz. Enthält ein ſphäriſches Netz lauter regelmäßige Scheitel von einer und derſelben Gattung, ſo iſt es ein regelmäßiges.

Beweis. Da jede Seite des Netzes zu zwei Scheiteln gehört, ſo iſt durch die Regelmäßigkeit der Scheitel zugleich die Gleichheit aller Seiten des Netzes bedingt. Und da alle Scheitel der Regelmäßigkeit wegen gleich viele und gleiche Winkel haben, deren Summen bei jedem Scheitel der Summe von vier Rechten gleich iſt; ſo iſt klar, daß auch alle Winkel des Netzes unter ſich gleich ſind. Hat nun das Netz lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, ſo ſind alle Polygone deſſelben regelmäßige und auch von einerlei Gattung, d. h. von gleichviel Seiten, weil ſie der überall gleichen Seiten und Winkel wegen ſich decken können. Hieraus aber folgt die Regelmäßigkeit für das ganze Netz.

§. 118.

Lehrſatz. Die Mittelpunkte der Polygone eines regelmäßigen Netzes bilden wieder ein regelmäßigs Netz, das jenem verwandt iſt.

Beweis. Von dem Mittelpunkte M (Fig. 81.) eines Polygones des regelmäßigen Netzes ziehe man nach den Mittelpunkten N, O, u. ſ. w. der angrenzenden Polygone Bogen, MN, MO, u. ſ. w. Es ſind nun

1) dieſe Bogen MN, MO,.... einander gleich.

Denn da die Polygone eines regelmäßigen Netzes unter ſich kongruent ſind, ſo ſind die Radien MB, NB; OB,.... der um dieſelben beſchriebenen Kreiſe einander gleich. Da ferner die Winkel x, y, z, u einander gleich ſind (weil der

Radius des umgeſchriebenen Kreiſes jeden Winkel des Polygones halbirt), ſo iſt der Winkel NBM=MBO; mithin die Dreiecke NBM und MBO' einander gleich; daher MN=MO. Verbindet man ſo den Mittelpunkt jedes andern Polygones mit denen der anliegenden, ſo ſind alle dieſe Verbindungsbogen, wie MN, MO unter ſich gleich. Denn es ſind die von einem Punkte, wie M, ausgehenden Bogen unter ſich gleich und jeder Bogen gehört zu zwei Mittelpunkten. Daher hat das durch dieſe Bogen gebildete zweite Netz lauter gleiche Seiten.

2) Die Winkel, wie NMO, welche um jeden Mittelpunkt, wie M, herum liegen, ſind unter ſich gleich. Denn in dem gleichſchenklichen Dreiecke NBM iſt der Winkel an der Spitze B halbirt; daher ſtehen MN und BA auf einander ſenkrecht und in dem gleichſchenklichen Dreiecke AMB iſt deshalb der Winkel an der Spitze M ebenfalls halbirt. Es iſt alſo n=m; und da m=O iſt, wegen Gleichheit der Dreiecke NBM und BMO, ſo iſt n=O; daher der Winkel NMO dem Zentriwinkel AMB gleich. Daſſelbe gilt von den übrigen um M liegenden Winkeln, die alſo einander gleich ſind, weil die Zentriwinkel des Polygons ABC.... gleich groß ſind. Da alle Polygone des gegebenen Netzes einerlei Zentriwinkel haben, ſo ſind alle Winkel um die Mittelpunkte der Polygone deſſelben einander gleich. Das zweite Netz hat alſo gleiche Winkel und gleiche Seiten, woraus ſich wie oben die Regelmäßigkeit deſſelben ergiebt. Daß es dem gegebenen auch verwandt ſey, folgt durch die in dem zweiten Beweiſe des §. 114. gemachten Schlüſſe.

Anmerk. Unter den verwandten Netzen, welche nach §. 114. Zuſ. auch zu jedem regelmäßigen Netze gehören, kann das regelmäßige, ſchlechthin das verwandte Netz deſſelben heißen; wobei alſo der Begriff der Verwandtſchaft im engſten Sinne genommen wird.

§. 119.

Lehrſatz. Es können nur fünf regelmäßige Netze möglich ſeyn; nämlich:

1) ein Netz mit 4 Dreiecken und 4 dreiſeitigen Scheiteln;

2) mit 8 Dreiecken und 6 vierſeitigen Scheiteln;

3) mit 20 Dreiecken und 12 fünfſeitigen Scheiteln;

4) mit 6 Vierecken und 8 dreiſeitigen Scheiteln;

5) mit 12 Fünfecken und 20 dreiſeitigen Scheiteln.

Beweis. Da ſowohl die Figuren, als die Scheitel eines regelmäßigen Netzes von gleicher Gattung ſeyn müſſen (§. 115.), und da kein Netz ohne drei-, vier-, oder fünfſeitige Figuren und Scheitel möglich iſt (§. 111.); ſo kann ein regelmäßiges Netz nur aus Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken beſtehen, die in drei-, vier- oder fünfſeitigen Scheiteln zuſammenhängen. Es ſind aber ferner unmöglich: Netze mit lauter Vierecken und lauter vier- oder fünfſeitigen Scheiteln, ſo wie Netze mit lauter Fünfecken und vier- oder fünfſeitigen Scheiteln (§. 112.). Daher bleiben nur noch die fünf im Lehrſatze genannten Netze übrig, denen die dort bezeichneten Figuren und Scheitel nach §. 112. zukommen.

Zuſatz 1. Nehmen wir die Buchſtaben a, b, c, a′, b′, c′, in derſelben Bedeutung, wie früher (§. 110—112.), ſo laſſen ſich die fünf regelmäßigen Netze bezeichnen durch:

$$\binom{4a}{4a'};\ \binom{8a}{6b'};\ \binom{20a}{12c'};\ \binom{6b}{8a'};\ \binom{12c}{20a'}.$$

Die wegen Verwandtſchaft zuſammengehörigen Netze ſind: das zweite und das vierte; das dritte und das fünfte. Das erſte hat ſich ſelbſt zum verwandten.

Zuſatz 2. Da das erſte, vierte und fünfte Netz drei-

ſeitige Scheitel haben und die Winkel um jeden zuſammen 4 Rechte betragen, ſo iſt, wenn A den Polygonwinkel der Figuren des Netzes bezeichnet, in dieſen Netzen $3A = 2\pi$; daher $A = \frac{2}{3}\pi$. In dem zweiten Netze $\binom{8a}{6b'}$ iſt $4A = 2\pi$; alſo $A = \frac{1}{2}\pi$. In dem dritten $\binom{20a}{12c'}$ iſt $5A = 2\pi$; alſo $A = \frac{2}{5}\pi$.

Zuſatz 3. Die Zentriwinkel derſelben Polygone — ſie ſeyen durch C bezeichnet — haben mit den Polygonwinkeln der verwandten Netze einerlei Werthe, wie ſich ergiebt, wenn man jedes Polygon von ſeinem Mittelpunkte aus in gleichſchenkliche Dreiecke zerlegt. In den Dreiecken des erſten, zweiten und dritten Netzes iſt nämlich $3C = 2\pi$; daher $C = \frac{2}{3}\pi$; in dem vierten iſt $4C = 2\pi$; $C = \frac{1}{2}\pi$; in dem fünften iſt $5C = 2\pi$; $C = \frac{2}{5}\pi$.

Alſo iſt im 1ſten Netze $\begin{Bmatrix} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{2}{3}\pi \end{Bmatrix}$; im 2ten $\begin{Bmatrix} A = \frac{1}{2}\pi \\ C = \frac{2}{3}\pi \end{Bmatrix}$; im 3ten $\begin{Bmatrix} A = \frac{2}{5}\pi \\ C = \frac{2}{3}\pi \end{Bmatrix}$; im 4ten $\begin{Bmatrix} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{1}{2}\pi \end{Bmatrix}$; im 5ten $\begin{Bmatrix} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{2}{5}\pi \end{Bmatrix}$.

Anmerk. Die Möglichkeit der hier aufgeführten fünf regelmäßigen Netze zeigt folgende Aufgabe.

§. 120.

Aufgabe. Die im vorigen §. bezeichneten fünf regelmäßigen Netze zu konſtruiren.

Auflöſung. Es kommt zunächſt darauf an, eines der Polygone zu verzeichnen, aus denen das zu konſtruirende Netz beſteht. Da die Zahl der regelmäßigen Figuren, welche das Netz bilden; die Zahl der Seiten jeder Figur und der Inhalt der Kugelfläche ($=4\pi$) bekannt iſt; ſo läßt ſich nach §. 107. das geſuchte Polygon aus ſeinem Flächenraum und ſeiner Seitenzahl konſtruiren.

Hat man dies gefunden, ſo iſt noch zu zeigen, daß die Kugelfläche ſich wirklich in die angegebene Anzahl ſolcher Figuren zerlegen läßt.

Wird der Flächenraum des einzelnen Polygones mit T, die Seitenzahl mit S bezeichnet, ſo iſt für das erſte Netz $\binom{4\,a}{4\,a'}$ $T=\pi$; $N=3$; für das zweite Netz $\binom{8\,a}{6\,b'}$ iſt $T=\frac{1}{2}\pi$; $S=3$; für das dritte $\binom{20\,a}{12\,b'}$.... $T=\frac{1}{5}\pi$; $S=3$; für das vierte $\binom{6\,b}{8\,a'}$.... $T=\frac{2}{3}\pi$; $S=4$; für das fünfte $\binom{12\,c}{20\,a}$.... $T=\frac{1}{3}\pi$; $S=5$.

Ohne die oben (§. 107.) angegebene Konſtruktion zu wiederholen, nehmen wir an, dieſe Polygone ſeyen verzeichnet; wenden uns daher ſogleich zu dem zweiten Theile der Auflöſung.

1) Für das erſte Netz $\binom{4\,a}{4\,a'}$.

Es ſey. (Fig. 82.) abc ein gleichſeitiges Dreieck, deſſen Flächenraum $=\pi$, deſſen Winkel alſo jeder $=\frac{2}{3}\pi$ ſind. Von dem Mittelpunkte e des umgeſchriebenen Kreiſes ziehe man die Radien ea, eb, ec, welche unter ſich gleich ſind und die Winkel des Dreieckes halbiren; verlängere ſie über a, b, c bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte in d, dem Gegenpunkte von e; — ſo bilden die dadurch entſtandenen Dreiecke abd, acd, bcd mit abc das erſte regelmäßige Netz $\binom{4\,a}{4\,a'}$.

Beweis. Wegen des halbirenden Radius ea iſt der Winkel eab $=\frac{1}{3}\pi$; daher deſſen Nebenwinkel bad $=\frac{2}{3}\pi$. Aus gleichem Grunde iſt der Winkel abd $=\frac{2}{3}\pi$. Das Dreieck abd kann ſich alſo mit dem Dreiecke abc decken, wenn man ab des erſteren auf bc des letzteren legt, weil die an beiden Seiten liegenden Winkel gleich ſind. Es iſt alſo auch abd ein regelmäßiges Dreieck, deſſen Flächenraum $=\pi$ iſt.

Da dieſelben Schlüſſe für die beiden andern Dreiecke acd, bcd gelten; ſo iſt die Richtigkeit der Behauptung klar.

2) Für das zweite Netz $\binom{8\,a}{6\,b'}$.

Man nehme (Figur 83.) drei auf einander ſenkrechte

Hauptkreiſe: abcd, aecf, bedf; ſo bilden dieſe das regelmäßige Netz $\binom{8a}{6b'}$.

Beweis. Da die Hauptkreiſe auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die Durchſchnitte a, c die Pole von bedf; b, d die Pole von aecf; und e, f die Pole von abcd. Die Seiten der gebildeten acht Dreiecke ſind alſo Quadranten, alle Winkel rechte; daher alle Dreiecke regelmäßig und einander kongruent. Die Scheitel a, b, c, d, e, f entſprechen ebenfalls der Bedingung; daher auch das ganze Netz.

3) Für das dritte Netz $\binom{20a}{12c'}$.

Es ſey (Fig. 84.) das Dreieck abc ein gleichſeitiges und ſein Flächenraum $=\frac{1}{5}\pi$, jeder Winkel alſo $=\frac{2}{5}\pi$. Um den Punkt a als gemeinſchaftliche Spitze trage man noch vier ſolche Dreiecke acd, ade, aef, afb; konſtruire um a', den Gegenpunkt von a, die Gegendreiecke jener fünfe; a'e'f' als Gegendreieck von aef; a'e'd' als Gegendreieck von aed, u. ſ. w.; ziehe von b nach d', von c nach e', von d nach f' u. ſ. w. Bogen bd', ce', df', eb', fc'; endlich in den dadurch entſtandenen fünf Vierecken die Diagonalen be', cf', db' u. ſ. w., wodurch jene Vierecke in zehn Dreiecke zerfallen; — ſo hat man das regelmäßige Netz $\binom{20a}{12c'}$.

Beweis. Daß ſich um a herum jene fünf Dreiecke verzeichnen laſſen, folgt daraus, daß jeder Winkel $=\frac{2}{5}\pi$, die Summe fünf ſolcher Winkel alſo $=2\pi$ iſt. Die um a' herum liegenden fünf Dreiecke ſind jenen als Gegendreiecke gleich, alſo ebenfalls regelmäßige und der Flächenraum eines jeden $=\frac{1}{5}\pi$, jeder Winkel $=\frac{2}{5}\pi$. Es iſt alſo noch zu zeigen, daß von den zehn in der Mitte liegenden jedes dieſelben Eigenſchaften habe.

Die Scheitel b, c, d, e, f haben von a gleiche Entfernung (=ab); daher liegen ſie auf der Peripherie eines Nebenkreiſes, deſſen Mittelpunkt a, deſſen Radius = ab iſt. Die

Punkte b′, c′, d′, e′, f′ als Gegenpunkte jener liegen alſo auf der Peripherie des Gegenkreiſes. Das Viereck d′e′cb iſt daher ein ſphäriſches Parallelogramm, weil zwei einander gegenüberliegende Seiten deſſelben, d′e′ und bc, in Gegenkreiſen liegen und einander gleich ſind. Durch die Diagonale bc′ wird alſo das Parallelogramm d′e′bc in die gleichen Dreiecke d′be′, be′c zerlegt. Aus gleichen Gründen ergiebt ſich, daß auch das Viereck e′f′bc ein Parallelogramm und das Dreieck bce′ = e′f′c iſt. Schließt man ſo weiter auf die folgenden Vierecke, ſo findet ſich, daß die zehn in der Mitte liegenden Dreiecke gleichen Flächenraum haben. Da nun die Summe der fünf obern und der fünf untern Dreiecke $= 2\pi$ iſt, ſo nehmen auch die in der Mitte liegenden Dreiecke die halbe Kugelfläche ein; der Flächenraum eines jeden iſt alſo $= \frac{1}{5}\pi$.

Verlängert man die Seite a′e′ über e′ bis a, wo ſich die Seite ae als Fortſetzung deſſelben Bogens anſchließt (weil der Hauptkreis durch a′, e′ auch durch die Gegenpunkte a, e geht); ſo wird der Winkel bac dadurch halbirt. Denn es iſt Winkel e′ab + baf + fae = e′ac + cad + dae = π; und baf, fae = cad, dae, daher e′ab = e′ac. Die Dreiecke e′ab e′ac ſind alſo einander gleich, weil zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel in beiden gleich ſind (ab = ac; ae′ = ae′; e′ab = e′ac). Von dem Vierecke abe′c iſt alſo das Dreieck e′ca die Hälfte; und da der Flächenraum bce′ $= \frac{1}{5}\pi$ = abc iſt, ſo haben die Dreiecke e′ca, e′cb gleichen Flächenraum. Da ſie überdies gemeinſchaftliche Grundſeite e′c haben, ſo liegen ſie zwiſchen einerlei Gegenkreiſen. Aus demſelben Grunde müſſen auch die Dreiecke e′bc, e′ba zwiſchen einerlei Gegenkreiſen liegen. Sind aber die Seiten des Viereckes abe′c paarweiſe Sehnen je zweier Gegenkreiſe, ſo iſt das Viereck ein Parallelogramm, das durch die Diagonale bc in zwei, nach Seiten und Winkeln gleiche Dreiecke zerlegt wird. Das Dreieck bce′ iſt alſo ebenfalls ein regelmäßiges und jeder Winkel deſſelben $= \frac{3}{5}\pi$.

Dem Dreiecke bce' ſind nun die anliegenden bd'e' und ce'f', dieſen die folgenden u. ſ. w. gleich, als Hälften von Parallelogrammen; mithin iſt auch jedes der in der Mitte liegenden zehn Dreiecke ein regelmäßiges, dem Dreiecke abc kongruentes Dreieck. Alle Winkel des Netzes ſind $=\frac{2}{5}\pi$, mithin auch die zwölf Scheitel a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f', regelmäßig.

4) Für das vierte Netz $\binom{6\,\mathrm{b}}{8\,\mathrm{a}'}$.

Man nehme drei auf einander ſenkrechte Kreiſe (Fig. 83.), welche das zweite regelmäßige Netz $\binom{8\,\mathrm{a}}{6\,\mathrm{b}'}$ bilden; ſetze die Mittelpunkte dieſer acht regelmäßigen Dreiecke und verbinde durch Bogen jeden mit den der anliegenden Dreiecke; ſo bilden dieſe Bogen das regelmäßige Netz $\binom{6\,\mathrm{b}}{8\,\mathrm{a}'}$.

Beweis ergiebt ſich aus dem Beweiſe für das zweite Netz und aus §. 118.

5) Für das fünfte Netz $\binom{12\,\mathrm{c}}{20\,\mathrm{a}'}$.

Da dies fünfte regelmäßige Netz das verwandte des dritten iſt (§. 119. Zuſ. 1.); ſo nehme man in Figur 84. die Mittelpunkte aller Dreiecke jenes Netzes und verbinde jeden durch Bogen mit denen der anliegenden Dreiecke; ſo erhält man nach §. 118. das fünfte Netz.

Unabhängig von dem dritten Netze läßt es ſich auf folgende Art verzeichnen.

Es ſey (Fig. 85.) abcde ein regelmäßiges Fünfeck, deſſen Flächenraum $=\frac{1}{3}\pi$, jeder Winkel $=\frac{2}{3}\pi$ iſt. Von dem Mittelpunkte p des um daſſelbe beſchriebenen Kreiſes ziehe man die Radien pa, pb, pc, pd, pe und verlängere ſie reſp. bis f, g, h, i, k, ſo daß jede der Verlängerungen af, bg, u. ſ. w. einer Seite (ab) des Fünfeckes gleich iſt; lege an jeden der Punkte f, g, h,.... zwei Winkel, afh', afi'; bgi', bgk' u. ſ. w., jeden $=\frac{2}{3}\pi$, wodurch man eine Reihe von fünf Fünfecken erhält, von denen jedes eine Seite des un-

terſten Fünfeckes abcde zur Grundſeite und zur Spitze einen der Punkte f', g', h', i', k' hat; hierauf nehme man in a', b', c', d', e' die Gegenpunkte von a, b, c, d, e, welche das Gegenfünfeck a'b'c'd'e' geben, und verbinde die Ecken desſelben mit den oberſten Spitzen der vorigen fünf Fünfecke durch die Bogen a'f', b'g', c'h', d'i', e'k'; — ſo hat man das verlangte Netz.

Beweis. Es fällt in die Augen, daß die Fünfecke der untern Reihe abgi'f, afh'ke,...... kongruent ſind mit dem unterſten Fünfecke abcde; daher iſt nur zu erweiſen, daß auch den Fünfecken der obern Reihe c'd'i'f'h', c'h'kg'b',..... dieſe Eigenſchaft zukommt.

Die Punkte f, g, h, i, k haben alle gleiche Entfernung von p, liegen alſo in einem Nebenkreiſe, deſſen Mittelpunkt p und deſſen Radius $=$pf iſt. Auch die Punkte f', g', h', i', k' haben einerlei Entfernung von p. Denn die Bogen pi', ph' ſind einander gleich, weil die Dreiecke pfh', pfi' wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeſchloſſenen Winkels gleich ſind; eben ſo folgt die Gleichheit der übrigen, pg', pf', pk'.

Daher liegen f', g', h', i', k' in einem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt p, deſſen Radius $=$pi' iſt. Es iſt aber pi' das Supplement von pf; denn in dem Dreiecke pfi' iſt der Winkel pfh$=\frac{4}{5}\pi$; der Winkel pi'f$=\frac{1}{5}\pi$; weil die Dreiecke pfi', pgi' wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeſchloſſenen Winkels gleich, alſo der Winkel pi'f$=$pi'g$=\frac{1}{2}$fi'g iſt. Die Summe pfi'$+$pi'f iſt alſo $=\pi$, daher auch pf$+$pi'$=\pi$ und pi'$=\pi-$pf. Der Kreis alſo, in welchem die Punkte f', g', h', i', k' liegen, iſt der Gegenkreis des durch f, g, h, i, k gehenden. Jene Punkte f', g',.... ſind aber auch die Gegenpunkte der letztern f, g,..... Denn verlängert man den Bogen paf über f, ſo geht er durch a', den Gegenpunkt von a; verlängert man ihn rückwärts über p, ſo geht er, wie leicht in die Augen fällt, ſenkrecht durch die Mitte der Grundſeiten dc des regelmäßigen Fünfeckes dchf'i und daher auch durch die Spitze f' deſſelben. Die Punkte f, f' ſind alſo Durch-

ſchnitte eines Hauptkreiſes mit zwei Gegenkreiſen, und zwar die auf entgegengeſetzten Seiten der Kugel liegenden; daher ſind ſie Gegenpunkte. Auf gleiche Weiſe erhellt, daß g und g'; h und h', u. ſ. w. Gegenpunkte; hieraus aber, daß die Fünfecke der obern Reihe c'd'i'f'h', c'h'k'g'b' u. ſ. w. Gegenfünfecke der untern cdifh, chkgb u. ſ. w., alſo ebenfalls regelmäßige, dieſen kongruente Fünfecke ſind. Die Regelmäßigkeit der 20 dreiſeitigen Scheitel erhellt ebenfalls hieraus, und ſomit iſt die Richtigkeit der Konſtruktion erwieſen.

Anmerk. Wie das ſphäriſche Polygon der Durchſchnitt der Kugelfläche mit einem körperlichen Winkel iſt, deſſen Scheitel in dem Mittelpunkte der Kugel liegt; ſo ſtehen auch die ſphäriſchen Netze in ähnlicher Beziehung zu den von lauter Ebnen begrenzten Körpern, zu den Polyedern.

Denkt man ſich nämlich von dem Mittelpunkte der Kugel grade Linien nach allen Scheiteln eines ſphäriſchen Netzes gezogen, die beliebig verlängert werden, und jede Gruppe dieſer Linien, die zu einem Polygone des Netzes gehört, durch eine Ebne geſchnitten; ſo bilden dieſe Ebnen ein Polyeder, deſſen Flächen, Kanten (arrêts) und Ecken den Figuren, Seiten und Scheiteln des Netzes der Anzahl und Gattung nach genau entſprechen. Durch die Ebnen je zweier jener graden Linien wird das Polyeder in körperliche Winkel zerlegt, deren Durchſchnitte mit der Kugelfläche die Figuren des Netzes ſind. Zu einem und demſelben Netze gehören unzählige Polyeder, weil die, die Gruppen jener verlängerten Radien begrenzenden Ebnen unzählige Lagen haben können.

Umgekehrt läßt ſich zu jedem Polyeder ein ſphäriſches Netz konſtruiren, wenn man von einem innerhalb deſſelben beliebig genommenen Punkte nach allen Ecken grade Linien gezogen, und dieſe durch eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der gemeinſchaftliche Ausgangspunkt jener Linien iſt, geſchnitten denkt. Die Durchſchnittspunkte geben die Scheitel eines Netzes, das dem Polyeder entſpricht. Da die Lage des in-

nerhalb des Polyeders zu nehmenden Punktes beliebig iſt, ſo laſſen ſich zu jedem Polyeder unzählige ſphäriſche Netze verzeichnen.

Legt man alſo den oben gebrauchten Buchſtaben p, p′, l, a, b, a′, b′ u. ſ. w. die entſprechenden Größen des Polyeders unter, ſo ergeben ſich dieſelben intereſſanten Eigenſchaften an dieſen Körpern, die am Netze gefunden wurden. Der Verwandtſchaft der Netze entſpricht die Verwandtſchaft der Polyeder, der Regelmäßigkeit jener die Regelmäßigkeit dieſer; die Sätze §. 116., 117., 118. laſſen ſich faſt wörtlich auf die genannten Körper übertragen.

Verbeſſerungen.

Seite	3.	Zeile 10. v. o.	ſtatt:	und MB leſe man: und ziehe MB.
„	9.	„ 9. v. o.	„	Ebne l. m.: Ebnen.
„	9.	„ 21. v. o.	„	Ebnen l. m.: Ebne.
„	11.	„ 12. v. o.	„	zu l. m.: in.
„	19.	„ 6 u. 7. v. o.	„	d l. m.: d″.
„	22.	„ 7. v. o.	„	deren Punkte die Elemente l. m.: deren Punkte die Pole der Elemente.
„	25.	„ 10. v. u.	„	$\overline{\alpha\beta}\gamma$ l. m.: $\alpha\overline{\beta\gamma}$.
„	27.	„ 1. v. o.	„	von $\overline{\alpha}$ l. m.: an $\widehat{\alpha}$.
„	41.	„ 2. v. u.	„	ſteht l. m.: folgt.
„	52.	„ 9. v. u.	„	als im Quadranten l. m.: als ein Quadrant.
„	54.	„ 5. v. u.	„	einen l. m.: einer.
„	55.	„ 6. v. o.	„	PRP l. m.: PRP′.
„	56.	„ 4. v. o.	„	Seite konſtruirt l. m.: Seite b konſtruirt.
„	61.	„ 5. v. u.	„	Aufgabe l. m.: Auflöſung.
„	62.	„ 6. v. o.	„	des andern l. m.: das andere.
„	63.	„ 19. v. o.	„	muß l. m.: kann.
„	70.	„ 17. v. u.	„	ABCD l. m.: ABCD (Fig. 42.).
„	71.	„ 7. v. o.	„	nach dem Lehrſatze l. m.: nach dem vorigen Lehrſatze.
„	71.	„ 12. v. u.	„	Folglich ABCDE .... l. m.: Folglich muß ABCDE ....
„	73.	„ 3 u. 4. v. u.	„	A″ l. m.: A′.
„	74.	„ 2 u. 3. v. o.	„	AA″ l. m.: AA′.
„	75.	„ 12. v. o.	„	AB, A′B′ l. m.: ABA′B′.
„	76.	„ 6. v. u.	„	dieſer l. m.: daher.
„	81.	„ 13. v. u.	„	AE′ = AE l. m.: AF′ = AF.
„	89.	„ 7. v. o.	„	daſſelbe l. m.: derſelbe.
„	91.	„ 4. v. o.	„	in l. m.: an.
„	94.	„ 11. v. o.	„	DB > DA l. m.: DB < DA.
„	103.	„ 6. v. u.	„	an gleichem l. m.: von gleichem.
„	104.	„ 3. v. o.	„	Fig. 61. l. m.: Fig. 57.
„	104.	„ 9. v. o.	„	größen l. m.: größten.
„	108.	„ 5. v. o.	„	In dem Dreiecke (Fig. 65.) l. m.: in dem Dreiecke ABB′ (Fig. 65.).

Anmerk. An mehrern Orten ſteht winklich, ſchenklich ſtatt winklig, ſchenklig; desgleichen reſpektiven ſtatt reſpektiv.

Digitized by Google

Die Sphärik

oder

die Geometrie der Kugelfläche

in drei Theilen.

Von

Karl Friedrich Schulz,
Doktor der Philoſophie und Konrektor am Gymnaſium in Kottbus.

Zweiter Theil.
Die trigonometriſche Sphärik.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig, 1829.
Bei Carl Cnobloch.

Sr. Hochwürden

dem

Königlich Preußiſchen Ober-Konſiſtorialrath
Ritter des rothen Adlerordens u. ſ. w.

Herrn Nolte

zur Feier

Seines fünf und zwanzigjährigen Konſiſtorial-
Jubiläums

als Zeichen innigſter Verehrung

gewidmet

vom

Verfaſſer.

Digitized by Google

Vorrede.

Vorliegende Bearbeitung des zweiten Theiles der Sphärik, deſſen Verhältniß zum erſten Theile und zur Sphärik überhaupt bereits angegeben iſt, behandelt dieſelben Gegenſtände, welche im erſten Theile der geometriſchen Betrachtung unterlagen und vervollſtändigt die dort begonnenen Theorieen, indem der Zuſammenhang und die gegenſeitige Abhängigkeit, unter den in gemeinſchaftlicher Beziehung ſtehenden Größen aufgefaßt, und in allgemein arithmetiſchen Ausdrücken dargeſtellt werden. Daher bildet vornämlich die Lehre von den ſphäriſchen Dreiecken — die ſphäriſche Trigonometrie im weiteren Sinne, — demnächſt aber die der ſphäriſchen Vierecke — Parallelogramme, Trapeze, ein = und umgeſchriebene Vierecke — und der Nebenkreiſe — die Kreislehre der Sphärik in beſonderem Sinne — den weſentlichen Inhalt dieſes Werkes.

Ueberall zeigt ſich in den Formeln der ſphäriſchen Geometrie eine, ſchon in den beiden Trigonometrieen ſichtbare, Analogie mit denen der Planimetrie, in welcher ſich ein durchgehendes und ſehr enges Verwandſchaftverhältniß zwiſchen der Geometrie der Eb'ne und

der der Kugelfläche ausſpricht, das beſonders bei denjenigen Sätzen in die Augen ſpringt, welche zu den planimetriſchen Proportionen im Kreiſe und in Dreiecken, zu der Lehre von der Theilung und Verwandlung der Dreiecke und Parallelogramme, namentlich der Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat u. a. m., — die analogen Theorieen der Sphärik enthalten. Es würde nicht unintereſſant ſein, dieſe Analogieen, welche ſich hier, dem Plane des Werkes zufolge, nur beiläufig, zerſtreut und nicht einmal vollſtändig darſtellen und bemerkbar machen ließen, als Gegenſtand beſonderer Unterſuchungen nach allen Richtungen zu verfolgen und die verſchiedenen Geſetze und Formeln der Kugelfläche, die auf der Eb'ne identiſch werden, zu vergleichen. Zur Erläuterung diene das rechtwinklige Dreieck. Es vereinigt dies Dreieck auf der Eb'ne die Merkmale, daß 1) ein Winkel ein rechter; 2) ein Winkel der Summe der übrigen gleich; 3) daß die Summe zweier Winkel einem rechten gleich iſt. Auf der Kugelfläche geben dieſe Merkmale drei weſentlich verſchiedene Dreiecke: 1) das rechtwinklige; 2) das im Halbkreiſe beſchriebene, d. h. deſſen Seite, die jenen Winkel gegenüber ſteht, der ſphäriſche Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt; 3) ein Dreieck, das, wie das vorhergehende, einen ſtumpfen (an der Stelle des planimetriſchen Rechten) und zwei ſpitze Winkel enthält, deſſen ſtumpfer Scheitel aber — wie auch der rechtwinklige Scheitel von Nr. 1. — in einer ſphäri-

ſchen Ellipſe liegt, deren Achſen in beſtimmter Abhängigkeit von einander ſtehen. Die Gleichungen der Kurven, in welchen dieſe drei Dreiecke liegen, müſſen Analogieen zu der planimetriſchen (Mittelpunkts-) Gleichung des Kreiſes:

$$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$$

ſein, die auch in der That in den folgenden Ausdrücken dieſer Gleichungen unverkennbar iſt.

Es iſt nämlich die Gleichung

für Nr. 1. $\tan^2 y = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos 2a}$;

oder: $\sin^2 y = \operatorname{tg}(a + x) \operatorname{tg}(a - x)$;

für Nr. 2. $\tan^2 y = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a}$

$$= \frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos^2 a};$$

oder: $\tan^2 \frac{1}{2} y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a + x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - x)$;

für Nr. 3. $\tan^2 y = \sin^2 a - \sin^2 x$

$$= \sin(a + x)\sin(a - x);$$

In den Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln dieſer Dreiecke, finden ſich ähnliche Analogieen zu den Formeln des eb'nen rechtwinkligen Dreieckes, deſſen Eigenſchaften ſich in jedem derſelben auf beſondere Weiſe abſpiegeln.

Unter der ſphäriſchen Trigonometrie im engern Sinne, verſteht man die Lehre von der Berechnung ſphäriſcher Dreiecke, inſofern die Beſtimmungsſtücke nur Seiten und Winkel des Dreieckes betreffen; daher die

dahin gehörigen Formeln nur Relationen zwiſchen dieſen Stücken enthalten. In weiterem Sinne muß die Trigonometrie der Kugelfläche alle Beſtimmungsweiſen ſphäriſcher Dreiecke umfaſſen, wie z. B. die Beſtimmung des Dreieckes in Rückſicht ſeiner Lage zwiſchen Gegenkreiſen, oder nach Baſis und Höhe. In jenem engern Sinne, bildet die ſphäriſche Trigonometrie den erſten Abſchnitt dieſes Werkes, und iſt — auch mit Rückſicht auf anderweitige, außerhalb der ſphäriſchen Geometrie ſtatt findende Anwendung derſelben — inſofern mit einiger Vollſtändigkeit behandelt worden, als von den Formeln derſelben die wichtigeren und ſonſt bemerkenswertheren aufgenommen worden ſind. In Betreff der Entwickelung dieſer Formeln, hat man bekanntlich zwei Methoden: die geometriſche, nach welcher jede Formel mit Hülfe einer ſpeciellen Conſtruktion begründet wird; und die analytiſche, nach welcher aus einer Fundamentalgleichung, die entweder aus einer beſonderen Conſtruktion, oder auch ohne ſolche aus den Gleichungen und Formeln der analytiſchen Geometrie gezogen werden kann, die übrigen trigonometriſchen Gleichungen und Formeln, blos durch Umwandelungen und Operationen, welche die Natur des Kalkuls darbietet, hergeleitet worden. Ein drittes — analytiſch-geometriſches oder geometriſch-analytiſches — Verfahren bildet keine beſondere Methode, ſondern iſt ein Gemiſch der angegebenen, wobei bald Rechnung, bald Geometrie vorherrſchend iſt. Es leidet

keinen Zweifel, daß das erſtere, geometriſche, Verfahren nicht ſelten ſchneller zum Ziele führt, als das rechnende, dem hinwiederum eine große Einfachheit und Gleichförmigkeit ſehr zum Vorzuge gereicht. Der Verfaſſer hat die beiderſeitigen Vorzüge in der analytiſchen Entwickelungsweiſe zu vereinigen geſucht, durch Zuziehung einiger, auf der Natur der ſphäriſchen Dreiecke beruhenden Verwandlungsformeln, deren Anwendung wenigſtens zwei Drittel des gewöhnlichen Kalkuls erſpart, mithin dieſe analytiſche Methode einer Kürze fähig macht, die auch in Vergleich mit der geometriſchen kaum mehr wünſchen läßt.

Unter den Gleichungen und Formeln der ſphäriſchen Trigonometrie kommen die meiſten unter der Form

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vor; namentlich die bekannte Fundamentalgleichung. Da auf dieſer die ganze Trigonometrie beruht, ſo muß ſie die nöthigen Elemente enthalten, um aus ihr die Natur der ſphäriſchen Dreiecke und insbeſondere die Geſetze der Similarität und Ambiguität zu entwickeln. In dieſer Rückſicht iſt jedoch dieſe Gleichung bisher eben ſo unbenutzt, als die erwähnte Theorie vernachläßigt, geblieben; eine Lücke, die wenigſtens in den analytiſchen Darſtellungen dieſer Wiſſenſchaft nicht beſtehen ſollte. Als Verſuch einer Ergänzung derſelben, iſt in der Einleitung eine Diskuſſion der Gleichung

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vorausgeſchickt worden, deren Ergebniß dann auf jene

Fundamentalgleichung übergetragen, die Geſetze der Similarität und Ambiguität eben ſo einfach und kurz, als allgemein ausſpricht.

Außerdem iſt in der Einleitung eine Zuſammenſtellung goniometriſcher Formeln und Reihen beigegeben worden, in der Abſicht, die Unterbrechung des Vortrages durch die ſonſt unvermeidliche wiederholte Einſchiebung derſelben zu beſeitigen, und dem Leſer eine zuſammenhängende Ueberſicht der Entwickelungen zu erleichtern. Die gegebene Entwickelung der genannten Reihen gilt denjenigen Leſern, die zum Studium der ſphäriſchen Trigonómetrie fähig ſind, ohne die erforderliche Vertrautheit mit dieſem Theile der Analyſis ſchon zu beſitzen, denen alſo mit einer kurzen, elementaren Begründung derſelben gedient ſein wird. Die Anwendung dieſer goniometriſchen Reihen auf die ſphäriſche Trigonometrie findet ſich in dem erſten der zwei, dem Werke beigefügten, Anhänge, von denen jener einige Nebenzweige der Trigonometrie berührt, die für den Text zu ſpeciell waren, doch an ſich zu wichtig, um ganz übergangen zu werden. In dem zweiten Anhange ſind einige in den erſten Theil gehörige Sätze und Zuſätze nachgeliefert worden, die zur Vervollſtändigung nicht überflüſſig ſein möchten.

Kottbus, im April 1829.

Schulz.

Einleitung.

§. 1.

Die trigonometriſche Sphärik hat denſelben Zweck, wie die geometriſche; nämlich, die Eigenſchaften der ſphäriſchen Dreiecke, Polygone und Kreiſe darzuſtellen. Sie unterſcheidet ſich jedoch von jener theils dadurch, daß ſie die Verhältniſſe der Größe und Lage, welche dort nur durch Konſtruktion unmittelbar erkannt werden, mit Hülfe der Rechnung ermittelt und beſtimmt; theils durch die Eigenthümlichkeit der Unterſuchungen, welche die Natur des goniometriſchen Kalkuls eröffnet. Indem die Ergebniſſe dieſes Kalkuls die auf geometriſchem Wege nachgewieſenen Verhältniſſe genauer beſtimmen und unter neuen Beziehungen darſtellen, tritt in denſelben zugleich die Verwandtſchaft, ſo wie die Verſchiedenheit der ſphäriſchen und der ebnen Figuren deutlicher und vielſeitiger hervor.

Wie die Lehre von den ſphäriſchen Dreiecken überhaupt die Grundlage der ſphäriſchen Geometrie bildet, ſo ſind auch die Formeln und Gleichungen für ſphäriſche Dreiecke — welche, für ſich genommen, die ſphäriſche Trigonometrie ausmachen — die Hauptelemente der trigonometriſchen Sphärik.

Die zur Herleitung dieſer und anderer Formeln und Gleichungen, ſo wie überhaupt zum goniometriſchen Kalkul, nöthigen Formeln ſollen nun zunächſt hier aufgeſtellt und zum Theil entwickelt werden.

Goniometriſche Formeln *).

§. 2.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; daher
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

2) $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$;

4) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$;

5) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$;

6) $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$;

7) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tang}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$;

8) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

9) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

10) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

11) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

12) $\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$;

13) $\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$;

14) $\operatorname{cotg}(a+b) = \dfrac{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}$;
$= \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$;

*) In den folgenden Formeln und ſpäterhin überall wird der Kreishalbmeſſer oder Sinus totus $=1$ angenommen. Um durch Wiedereinführung deſſelben die Dimenſionen der Formeln herzuſtellen, braucht man bekanntlich nur die fehlenden Faktoren in den unvollſtändigen Gliedern durch ſo oftmalige Hinzufügung des Halbmeſſers (r), als zur Vervollſtändigung der Dimenſion erforderlich iſt, zu ergänzen.

15) $\cot g\,(\alpha-\beta) = \dfrac{1+\tan g\,\alpha\,\tan g\,\beta}{\tan g\,\alpha - \tan g\,\beta}$;

$= \dfrac{\cot g\,\alpha\,\cot g\,\beta + 1}{\cot g\,\beta - \cot g\,\alpha}$;

16) $\sin(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \cos(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cos(\alpha-\frac{1}{4}\pi)$

$= (\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$;

17) $\sin(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cos(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = (\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$;

18) $\tan g(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \cot g(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \dfrac{1+\tan g\,\alpha}{1-\tan g\,\alpha} = \dfrac{\cot g\,\alpha+1}{\cot g\,\alpha-1}$;

19) $\tan g(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cot g(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \dfrac{1-\tan g\,\alpha}{1+\tan g\,\alpha} = \dfrac{\cot g\,\alpha-1}{\cot g\,\alpha+1}$;

20) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

21) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$.

22) $\tan g\,2\alpha = \dfrac{2\tan g\,\alpha}{1-\tan g^2\alpha}$;

23) $\cot g\,2\alpha = \dfrac{1-\tan g^2\alpha}{2\tan g\,\alpha} = \dfrac{\cot g^2\alpha-1}{2\cot g\,\alpha}$;

24) $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1-\cos\alpha$;

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

25) $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1+\cos\alpha$;

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

26) $2\sin^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = 2\cos^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = 1-\sin 2\alpha$;

27) $2\cos^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = 2\sin^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = 1+\sin 2\alpha$;

28) $\tan g^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cot g^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$;

29) $\tan g\,\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

30) $\cot g\,\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

31) $\tan g^2\frac{1}{2}\alpha + \dfrac{2}{\tan g\,\alpha}\cdot\tan g\,\frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$;

oder $\tan g^2\frac{1}{2}\alpha + 2\cot g\,\alpha.\tan g\,\frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$;

32) $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{\sin\alpha} \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha + 1 = 0$;

33) $\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 2\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$;

34) $\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{\sin\alpha} \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + 1 = 0$;

35) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

36) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$;

37) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

38) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin a}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}$;

39) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

40) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$;

41) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;

42) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$;

43) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

44) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

45) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

46) $\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

47) $\sin\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\frac{1}{2}\pi)$;
$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\pi)$

48) $\sin\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\pi)$;
$= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\frac{1}{2}\pi)$;

49) $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos a \cos\beta}$;

50) $\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

51) $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

52) $\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

53) $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$;

54) $\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = -\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta}$;

55) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

56) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

57) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

58) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

59) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

60) $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

61) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\cos\beta} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)}{\operatorname{taug}\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\pi)}$;

62) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

63) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

64) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

65) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

66) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$;

67) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta-\cos\alpha} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$;

68) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta = \cos^2\beta-\cos^2\alpha$;
$= (\sin\alpha+\sin\beta)\ (\sin\alpha-\sin\beta)$;
$= (\cos\beta+\cos\alpha)\ (\cos\beta-\cos\alpha)$;

69) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
$= \cos^2\alpha-\sin^2\beta$
$= \cos^2\beta-\sin^2\alpha$
$= (\cos\alpha+\sin\beta)\ (\cos\alpha-\sin\beta)$;
$= (\cos\beta+\sin\alpha)\ (\cos\beta-\sin\alpha)$;

Digitized by Google

70) $\frac{\tang \alpha + \tang \beta}{\tang \alpha - \tang \beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cotg \alpha + \cotg \beta}{\cotg \beta - \cotg \alpha}$;

71) $\frac{\tang \alpha + \tang \beta}{\cotg \alpha + \cotg \beta} = \tang \alpha \tang \beta = \frac{\tang \alpha - \tang \beta}{\cotg \beta - \cotg \alpha}$;

72) $\frac{\tang \alpha + \tang \beta}{\cotg \beta - \cotg \alpha} = \tang \alpha . \tang \beta . \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$;

73) $\frac{\tang \alpha - \tang \beta}{\cotg \alpha + \cotg \beta} = \tang \alpha . \tang \beta . \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

74) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$;

75) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$;

76) $\tang(-\alpha) = -\tang \alpha$;

77) $\sin \alpha = \sin(2r\pi + \alpha) = \sin\big((2r+1)\pi - \alpha\big)$;

78) $\cos \alpha = \cos(2r\pi \pm \alpha)$;

79) $\tang \alpha = \tang(r\pi + \alpha)$;

80) $\left.\begin{matrix}\sin(2r\pi - \alpha) \\ \sin\big((2r+1)+\alpha\big)\end{matrix}\right\} = -\sin \alpha$;

81) $\cos\big((2r+1)\pi \pm \alpha\big) = -\cos \alpha$;

82) $\tang(r\pi - \alpha) \qquad = -\tang \alpha$.

Anmerk. In den Formeln 77—82 bedeutet r jede, poſitive oder negative, ganze Zahl; Null nicht ausgeſchloſſen.

§. 3.

Aus den Formeln 8—11 ergeben ſich folgende:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Denn es iſt

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$$
$$= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)$$
$$= \sin \alpha \sin \gamma \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \gamma \sin^2 \beta + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta \cos \beta + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta \cos \beta$$
$$= \sin \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \sin^2 \beta + \cos \alpha \cos \gamma \sin^2 \beta + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta \cos \beta + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta \cos \beta$$
$$= \sin \alpha \sin \gamma + (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)\sin^2 \beta + (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) \sin \beta \cos \beta$$
$$= \sin \alpha \sin \gamma + [\cos(\alpha+\gamma)\sin \beta + \sin(\alpha+\gamma)\cos \beta] \sin \beta$$
$$= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Dieſelbe Entwickelung, wie vorher, mit dem Unterſchiede, daß man $1-\cos^2\beta$ für $\sin^2\beta$ ſetzt; während vorher $1-\sin^2\beta$ für $\cos^2\beta$ geſetzt wurde.

3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$;
$=\sin\alpha\sin\gamma+\cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Es iſt nämlich:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\ (\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma);$$
$$=\cos\alpha\cos\gamma\cos^2\beta+\sin\alpha\sin\gamma\ \sin^2\beta-$$
$$(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\cos\beta\sin\beta;\ (\varphi)$$
$$=\cos\alpha\cos\gamma-(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)\sin^2\beta-$$
$$(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\cos\beta\sin\beta$$
$$=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\beta[\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta+\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta];$$
$$=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Für die zweite Formel ſetze man in (φ) $1-\cos^2\beta$ für $\sin^2\beta$.

4) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)$;
$=-\cos\alpha\sin\gamma+\cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$;
dieſelbe Entwickelung.

5) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha+\sin\gamma\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$=\frac{\sin\beta\ \sin\gamma+\sin\alpha\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\ \sin\alpha+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

Denn man ſetze $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}=\dfrac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}$ und nehme für Zähler und Nenner die aus 1) und 2) ſich ergebenden Werthe.

6) $$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)}=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$=\frac{\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\ \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\ \sin\alpha+\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$

Digitized by Google

$$= \frac{\sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta \cos\alpha - \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Setzt man nämlich $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\cos(\beta+\alpha)\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)}$ ſo erhält man für Zähler und Nenner nach Num. 3. doppelte Werthe.

7) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta \sin\alpha + \sin\gamma \cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\beta \cos\alpha + \cos\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\beta \cos\alpha + \cos\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta \sin\alpha + \sin\gamma \cos(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Denn $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\cos(\gamma+\beta)}$. Der Zähler läßt ſich nach Num. 1 und 2, der Nenner nach Num. 4 zerlegen.

8) $$\tang(\alpha+\beta)\tang(\beta+\gamma) = \frac{\sin\alpha \sin\gamma + \sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha \cos\gamma - \sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\cos\alpha \cos\gamma - \cos\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma + \cos\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\sin\alpha \sin\gamma + \sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma + \cos\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\cos\alpha \cos\gamma - \cos\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha \cos\gamma - \sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

9) $$\frac{\tang(\alpha+\beta)}{\tang(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\alpha \cos\gamma + \sin\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha \sin\gamma + \sin\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{-\cos\alpha \sin\gamma + \cos\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\cos\gamma \sin\alpha + \cos\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{\sin\alpha \cos\gamma + \sin\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha \cos\gamma + \cos\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$
$$= \frac{-\cos\alpha \sin\gamma + \cos\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha \sin\gamma + \sin\beta \cos(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Anmerk. Sind vier Bogen oder Winkel α, β, γ, δ ſo beſchaffen, daß $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ iſt; ſo kann in dieſen Formeln für $(\alpha+\beta+\gamma)$ geſetzt werden $\pi-\delta$. Man erhält dann:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta;$$
$$= \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\delta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin\delta;$$
$$= \sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta\cos\delta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta\cos\delta;$$
$$= -\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin\delta; \text{ u. ſ. w.}$$

Ein ſolcher Fall findet ſich bei dem eingeſchriebenen Vierecke, deſſen Seiten als die doppelten Sinus der halben zugehörigen Bogen oder Mittelpunktswinkel betrachtet werden können. Die Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreiſes auf die Seiten des Viereckes geben dann die Koſinus derſelben Bogen. Nimmt man alſo in den hier angedeuteten Formeln für $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$ u. ſ. w. die entſprechenden Stücke des Viereckes; für $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\beta+\gamma)$ die halben Diagonalen, ſo ergeben die Formeln eine Menge Beziehungen zwiſchen den Seiten, Diagonalen und deren Entfernungen vom Mittelpunkte.

§. 4.

Als beſondere Fälle der Zuſammenziehung in Faktoren verdienen folgende hier bemerkt zu werden.

1) $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).$$

Man addire nämlich $(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta)$ zu

$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, ſo erhält man:

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\gamma$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma;$$
$$=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\cos^2\gamma);$$
$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2;$$
$$=(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma);$$
$$=[\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)]\;[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma];$$
$$=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$$

2) $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$$=-4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

Man addire wieder $(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta)$ zu

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

ſo ergiebt ſich:

$$(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta) - (\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma);$$

$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos a\cos\beta + \cos\gamma)^2;$$

$$= (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma);$$

$$= -\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma\right)\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos\gamma\right);$$

$$= -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma).$$

3) $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma).$$

Addirt man nämlich $(\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)$ ſo wird

$$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma)$$

$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - (\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma)^2$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma)$$

$$= \left(\cos(\alpha + \beta) - \cos\gamma\right)\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma\right)$$

$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma).$$

4) $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma).\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma).$$

5) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + \tfrac{1}{2}\pi).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi)$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + \tfrac{1}{2}\pi).\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man nämlich $\gamma = \frac{1}{2}\pi - \gamma'$ ſo erhält man die Formel Num. 1 für α, β, γ' in welcher für γ' wieder $\frac{1}{2}\pi - \gamma$ ſubſtituirt wird. Der doppelte Ausdruck ergiebt ſich aus §. 2, Num. 16. und 17. Eben ſo laſſen ſich die folgenden Ausdrücke herleiten.

6) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$$= -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi)\ \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$

7) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$

8) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi)\ \sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Goniometriſche Reihen.

§. 5.

1) Multiplizirt man die imaginären Binomien $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})$ und $(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})$; ſo erhält man das Produkt
$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1};$$
ein imaginäres Binom von derſelben Form, das die Summe aus den Bogen der Faktoren enthält.
Eben ſo iſt $(\cos\alpha-\sin\alpha.\sqrt{-1})(\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1})=$
$$\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}$$
und $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})\ (\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1})=$
$$\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sqrt{-1};$$
welche Fälle in dem erſten enthalten ſind, wenn dort α und β, oder β allein negativ genommen wird.

2) Für Quotienten ſolcher Binomien findet ſich
$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}}{\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}}=\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta).\sqrt{-1};$$
hier tritt alſo die Differenz der Bogen des Zählers und Nenners ein. Es iſt nämlich $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}}{\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}}$

$$= \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})\,(\cos\beta - \sin\beta . \sqrt{-1})}{(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1})\,(\cos\beta - \sin\beta . \sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta) . \sqrt{-1}}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta) . \sqrt{-1}.$$

3) Aus (1) folgt, daß das Produkt von n imaginären Binomien

$$(\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})\,(\cos\alpha'' + \sin\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots\ldots (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1})$$

$$= \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) . \sqrt{-1}$$

iſt. Die Entwickelung des Produktes jener n Binomien giebt ein Aggregat reeller Größen und ein anderes imaginärer; ſo daß, wenn jenes mit R, dieſes mit $S\sqrt{-1}$ bezeichnet wird, man erhält

$$R + S\sqrt{-1} = \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) . \sqrt{-1};$$

woraus dann folgt:

$$\cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = R;$$

$$\sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = S; \text{ daher}$$

$$\text{tang}(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = \frac{S}{R}.$$

Setzt man, um R und S zu finden, in der Gleichung

$$R + S\sqrt{-1} = (\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})(\cos\alpha'' + \sin\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots$$

$$\ldots (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1});$$

$\cos\alpha'(1 + \text{tang}\,\alpha' . \sqrt{-1})$ für $(\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})$;

$\cos\alpha''(1 + \text{tang}\,\alpha'' . \sqrt{-1})$ für $(\cos\alpha'' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})$ u. ſ. w.

ſo erhält man

$$R + S\sqrt{-1} = \cos\alpha' . \cos\alpha'' \ldots \cos\overset{n}{\alpha}\,(1 + \text{tg}\,\alpha' . \sqrt{-1}).$$

$$(1 + \text{tg}\,\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots\ldots (1 + \text{tg}\,\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1}).$$

Das Produkt von n Binomien $(1+a)\,(1+b)\,(1+c) \ldots (1+z)$ iſt nun $= 1 + A + B + C + \ldots$, wo A die Summe der Unionen $a+b+c+\ldots$; B die Summe der Binionen $ab+ac+\ldots$; C die Summe der Ternionen $abc + abd + \ldots$ u. ſ. w., aus den n Elementen a, b, c, … z und zwar ohne Wiederholung, bedeuten. Setzt man alſo für a, b, c, …. reſp. $\text{tang}\,\alpha' . \sqrt{-1}$, $\text{tang}\,\alpha'' . \sqrt{-1}$, $\text{tang}\,\alpha''' . \sqrt{-1}$ u. ſ. w. und ſondert die ima-

ginäre Einheit $\sqrt{-1}$ in jeder Klaſſe (A, B, C ....) ab, ſo läßt ſich das zu entwickelnde Produkt ſo darſtellen:

$$R+S\sqrt{-1}=\cos\alpha'.\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}.$$
$$[1+A.\sqrt{-1}+B(\sqrt{-1})^2+C(\sqrt{-1})^3+.....];$$
$$=\cos\alpha'.\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}[1+A\sqrt{-1}-B-C\sqrt{-1}+D+....];$$

wo A, B, C, D, ... die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen u. ſ. w. aus den Elementen $tg\alpha'$, $tg\alpha''$, $tg\alpha'''$,..... bezeichnen. Hieraus ergiebt ſich, wenn die reellen Theile von den imaginären geſondert werden,

$$R=\cos\alpha'\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}(1-B+D-F+...);$$
$$S=\cos\alpha'.\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}(A-C+E-...).$$

Daher iſt

1) $\cos(\alpha'+\alpha''+...+\overset{n}{\alpha})=\cos\alpha'\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}(1-B+D-F+...)$

2) $\sin(\alpha'+\alpha''+...+\overset{n}{\alpha})=\cos\alpha'\cos\alpha''....\cos\overset{n}{\alpha}(A-C+E-...);$

3) $\tan(\alpha'+\alpha''+....+\overset{n}{\alpha})=\dfrac{A-C+E-....}{1-B+D-F+....}$

z. B. für n=3 iſt

$$\cos(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''.$$
$$(1-tg\alpha'\,tg\alpha''-tg\alpha'\,tg\alpha'''-tg\alpha''\,tg\alpha''');$$
$$=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''-\sin\alpha'\sin\alpha''\cos\alpha'''$$
$$-\sin\alpha'\sin\alpha'''\cos\alpha''$$
$$-\sin\alpha''\sin\alpha'''\cos\alpha';$$

$$\sin(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''.$$
$$(tg\alpha'+tg\alpha''+tg\alpha'''-tg\alpha'\,tg\alpha''\,tg\alpha''');$$
$$=\sin\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''+\sin\alpha''\cos\alpha'\cos\alpha'''+\sin\alpha'''\cos\alpha'\cos\alpha''$$
$$-\sin\alpha'\sin\alpha''\sin\alpha''';$$

$$\tan(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\frac{\tan\alpha'+tg\alpha''+tg\alpha'''-tg\alpha'\,tg\alpha''\,tg\alpha'''}{1-tg\alpha'\,tg\alpha''-tg\alpha''\,tg\alpha'''-tg\alpha'\,tg\alpha'''}.$$

4) Iſt $\alpha'=\alpha''=\alpha'''=.....=\overset{n}{\alpha}$; ſo werden die Komplexionen jeder Klaſſe A, B, C,.... identiſch. Die Zahl derſelben in A iſt $=n$; in $B=\dfrac{n(n-1)}{1.2}$; in $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ u. ſ. w. Bezeichnen wir dieſe Binomialkoeffizienten durch $\overset{1}{Bn}$, $\overset{2}{Bn}$, $\overset{3}{Bn}$ u. ſ. w., ſo ergiebt ſich aus (3)

1) $\cos(n\alpha) = \cos^n\alpha\,(1 - \mathfrak{B}\overset{2}{n}\,tg^2\alpha + \mathfrak{B}\overset{4}{n}\,tg^4\alpha - \mathfrak{B}\overset{6}{n}\,tg^6\alpha + \ldots);$

2) $\sin(n\alpha) = \cos^n\alpha\,(\mathfrak{B}\overset{1}{n}\,tg\,\alpha - \mathfrak{B}\overset{3}{n}\,tg^3\alpha + \mathfrak{B}\overset{5}{n}\,tg^5\alpha - \ldots):$

3) $tg(n\alpha) = \dfrac{\mathfrak{B}\overset{1}{n}\,tg\,\alpha - \mathfrak{B}\overset{3}{n}\,tg^3\alpha + \mathfrak{B}\overset{5}{n}\,tg^5\alpha - \ldots}{1 - \mathfrak{B}\overset{2}{n}\,tg^2\alpha + \mathfrak{B}\overset{4}{n}\,tg^4\alpha - \ldots.}$

z. B. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha\,(1 - 3\,tg^2\alpha)$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$

$\sin 3\alpha = \cos^3\alpha\,(3\,tg\,\alpha - tg^3\alpha)$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

$\tan 3\alpha = \dfrac{3\,tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha};$

5) Indem $\alpha' = \alpha'' = \ldots. = \overset{n}{\alpha}$ wird, erhält man aus

$(\cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1})\,(\cos\alpha'' + \sin\alpha''.\sqrt{-1})\ldots. + (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha}.\sqrt{-1})$

$= \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots. + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}).\sqrt{-1};$

für Potenzen ſolcher imaginären Binomien den Ausdruck

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos(n\alpha) + \sin(n\alpha).\sqrt{-1};\ (\varphi)$

Setzt man α negativ, ſo ergiebt ſich

$(\cos\alpha - \sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos(n\alpha) - \sin(n\alpha).\sqrt{-1}.$

Daß dieſe Ausdrücke auch für gebrochene und negative Werthe von n gültig ſind, zeigen folgende Schlüſſe.

A) Es ſeien p, q zwei poſitive ganze Zahlen. Man erhält dann

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{p}{q}} = ((\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^p)^{\frac{1}{q}};$

$= (\cos p\alpha + \sin p\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}};$

Setzt man das willführliche $\alpha = \frac{q}{p}.\alpha'$, wodurch $\alpha' = \frac{p}{q}.\alpha$ wird, ſo wird

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{p}{q}} = (\cos q\alpha' + \sin q\alpha'.\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$

$= ((\cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1})^q)^{\frac{1}{q}}$

$= \cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1}$

$= \cos\left(\frac{p}{q}\alpha\right) + \sin\left(\frac{p}{q}\alpha\right).\sqrt{-1}.$

B) Für negative, ganze oder gebrochene, Werthe von n iſt

$$(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^{-n}=\frac{1}{(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n}$$
$$=\frac{1}{\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}}$$
$$=\frac{\cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}}{(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1})(\cos n\alpha-\sin n\alpha\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{\cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}}{\cos^2 n\alpha+\sin^2 n\alpha}$$
$$=\cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}$$
$$=\cos(-n)\alpha+\sin(-n)\alpha.\sqrt{-1}.$$

Hieraus ergiebt ſich auch die Gültigkeit der in (4) für $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$, $\operatorname{tang} n\alpha$ entwickelten Reihen, wenn n eine gebrochene, poſitive oder negative Zahl iſt. Denn es iſt allgemein:

$$\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}=(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n=\cos^n\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha.\sqrt{-1})^n$$
$$=\cos^n\alpha\,(1+\overset{1}{\mathfrak{B}}n\operatorname{tg}\alpha.\sqrt{-1}-\overset{2}{\mathfrak{B}}n\operatorname{tg}^2\alpha-\overset{3}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^3\alpha.\sqrt{-1}$$
$$+\overset{4}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^4\alpha+\ldots.);$$

daher für jeden Werth von n

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha\,(1-\overset{2}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^2\alpha+\overset{4}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^4\alpha-\overset{6}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^6\alpha+\ldots);$$
$$\sin n\alpha=\cos^n\alpha\,(\overset{1}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}\alpha-\overset{3}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^3\alpha+\overset{5}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^5\alpha-\ldots.);$$
$$\operatorname{tang} n\alpha=\frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg} a-\overset{3}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^3\alpha+\overset{5}{\mathfrak{B}}n\operatorname{tg}^5\alpha-\ldots.}{1-\overset{2}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^2\alpha+\overset{4}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^4\alpha-\overset{6}{\mathfrak{B}}n.\operatorname{tg}^6\alpha+\ldots.}.$$

Anmerk. Nach der allgemeingültigen Formel $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n=\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}$ läßt ſich für jede Potenz und Wurzel des imaginären Binoms $A+B\sqrt{-1}$ ein endlicher Ausdruck angeben und berechnen. Denn ſetzt man $A=k.\cos\alpha$; $B=k\sin\alpha$, wodurch ſich $\operatorname{tang}\alpha=\frac{B}{A}$ und $k=\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\sin\alpha}=\sqrt{A^2+B^2}$ beſtimmt; ſo erhält man für jedes n

$$(A+B\sqrt{-1})^n=k^n(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n=k^n.(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1});$$
$$=\frac{A^n}{\cos^n\alpha}.(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1})=\frac{B^n}{\sin^n\alpha}(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1})\ (\varphi).$$

Eben ſo $(A-B.\sqrt{-1})^n = \frac{A^n}{\cos^n\alpha}(\cos n\alpha - \sin n\alpha\sqrt{-1})$

$$= \frac{B^n}{\sin^n\alpha}(\cos n\alpha - \sin n\alpha.\sqrt{-1});\ (\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt noch

$$(A+B\sqrt{-1})^n + (A-B\sqrt{-1})^n = \frac{2\,A^n.\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{2\,B^n.\cos n\alpha}{\sin^n\alpha}.$$

§. 6.

Die Aehnlichkeit der Produkte, Quotienten und Potenzen imaginärer Binomien von der Form $\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}$ mit den Formen der Logarithmen von Produkten, Quotienten und Potenzen deutet auf eine logarithmiſche oder exponentielle Beziehung zwiſchen den goniometriſchen Funktionen und den Kreisbogen, deren Unterſuchung zu ſehr wichtigen Ergebniſſen führt. Setzt man nämlich

$$\log(\cos z + \sin z\sqrt{-1}) = \varphi + \psi\sqrt{-1};$$

ſo findet ſich

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} = \log[\cos z\ (1 + \operatorname{tang} z.\sqrt{-1})]$$
$$= \log\cos z + \log(1 + \operatorname{tang} z.\sqrt{-1}).$$

Nach der Formel $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$ erhält man hieraus

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} = \log\cos z + \operatorname{tg} z.\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} z.\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(\operatorname{tg} z.\sqrt{-1})^3 - \ldots$$
$$= \log\cos z + \operatorname{tg} z\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z.\sqrt{-1} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 z + \ldots;$$

Sondert man die reellen von den imaginären Gliedern, welche auf beiden Seiten der Gleichung reſp. gleich ſeyn müſſen, ſo erhält man

1) $\varphi = \log\cos z + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 z + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 z - \ldots;$

2) $\psi = \operatorname{tg} z - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 z - \ldots..$

Aus der Gleichung (1) ergiebt ſich

$$\varphi = \log\cos z + \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 z - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4 z + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^6 z - \ldots..)$$
$$= \log\cos z + \tfrac{1}{2}\log(1 + \operatorname{tg}^2 z)$$
$$= \log\cos z + \log\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}$$
$$= \log(\cos z.\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}) = \log\left(\frac{\cos z}{\cos z}\right) = \log 1$$
$$= 0$$

Digitized by Google

Indem alſo $\varphi = o$ iſt, hat man

$$\log(\cos z + \sin z \,.\, \sqrt{-1}) = \psi \sqrt{-1}$$

wo $\psi = \operatorname{tg} z - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 z - \ldots.$

Dann iſt aber

$$3)\ \cos z + \sin z \,.\, \sqrt{-1} = e^{\psi\sqrt{-1}};$$

indem e die Baſis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Entwickelt man den zweiten Theil der Gleichung (3) nach der Formel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

ſo erhält man

$$\cos z + \sin z \,.\, \sqrt{-1} = 1 + \psi\sqrt{-1} - \frac{\psi^2}{1.2} - \frac{\psi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

woraus ſich ergiebt

$$4)\ \cos z = 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - \frac{\psi^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

$$5)\ \sin z = \psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Um ψ durch z unmittelbar auszudrücken, ſetze man

$$\sin z = \alpha + az + bz^2 + cz^3 + \ldots.$$

Da für $z = o$ auch $\sin z = o$ wird, ſo muß $\alpha = o$, und

$$\sin z = az + bz^2 + cz^3 + \ldots \text{(A)}$$

ſein. Dividirt man hier auf beiden Seiten mit z, ſo iſt

$$\frac{\sin z}{z} = a + bz + cz^2 + \ldots$$

und für $z = o$ erhält man

$$a = \frac{o}{o}.$$

Das Grenzverhältniß des Bogens und Sinus iſt aber $= 1$, *) mithin iſt hier $\frac{o}{o} = 1$ daher $a = 1$.

*) Denn es iſt $\frac{\sin z}{\tan g\, z} < \frac{\sin z}{z}$, weil $\operatorname{tg} z > z$ iſt; aber $\frac{\sin z}{z} < 1$ weil $z > \sin z$. Alſo liegt $\frac{\sin z}{z}$ immer zwiſchen $\frac{\sin z}{\operatorname{tg} z}$ und 1; oder,

Dieſen Werth in (A) eingeſetzt giebt:

$$\sin z = z + bz^2 + cz^3 + \ldots . \text{ (B)}$$

Aus (B) und (5) folgt

$$\psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots . = z + bz^2 + cz^3 + \ldots \text{ (C)}$$

Wie nun $\cos z + \sin z . \sqrt{-1} = e^{\psi . \sqrt{-1}}$ iſt, ſo iſt auch

$$\cos nz + \sin nz . \sqrt{-1} = (\cos z + \sin z . \sqrt{-1})^n$$
$$= e^{n\psi . \sqrt{-1}} .$$

Demnach findet zwiſchen z und ψ die Relation ſtatt, daß, wenn z in nz verwandelt wird, auch ψ in $n\psi$ übergeht. Setzt man alſo nz, $n\psi$ für z, ψ in (C) ſo erhält man:

$$n\psi - \frac{n^3\psi^3}{1.2.3} + \frac{n^5 . \psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots . = nz + n^2bz^2 + n^3cz^3 + \ldots .$$

und wenn mit n beiderſeits dividirt wird:

$$\psi - \frac{n^2\psi^3}{1.2.3} + \frac{n^4 . \psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots . = z + nbz^2 + n^2cz^3 + \ldots .$$

Aus dieſer für jeden Werth von n gültigen Gleichung geht für $n = o$ hervor:

$$\psi = z.$$

Die obigen Gleichungen (5), (4), (2), (3) geben alſo, wenn dort z für ψ geſchrieben wird,

$$\text{I.) } \sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots .$$

$$\text{II.) } \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots .$$

$$\text{III.) } z = \operatorname{tg} z - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 z - \ldots .$$

$$\text{IV.) } \cos z + \sin z . \sqrt{-1} = e^{z\sqrt{-1}} .$$

Aus negativen Werthen von z erhält man in (IV.)

$$\text{V.) } \cos z - \sin z \sqrt{-1} = e^{-z\sqrt{-1}} .$$

---

da $\frac{\sin z}{\operatorname{tg} z} = \cos z$ iſt, zwiſchen $\cos z$ und 1. Wird nun $z = 0$; ſo wird $\cos z = 1$; daher liegt $\frac{\sin z}{z}$ für $z = 0$ zwiſchen 1 und 1 d. h. $\frac{\sin o}{o} = 1$.

Addirt man (IV.) und (V.), ſo folgt:

$$\text{VI.)}\quad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}.$$

Durch Subtraktion ergiebt ſich:

$$\text{VII.)}\quad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Durch Diviſion der Gleichung (IV.) durch (V.) erfolgt:

$$\frac{\cos z + \sin z . \sqrt{-1}}{\cos z - \sin z . \sqrt{-1}} = e^{2z.\sqrt{-1}};$$ und, wenn

Zähler und Nenner durch cos z dividirt wird:

$$\text{VIII.)}\quad \frac{1 + \text{tang}\, z . \sqrt{-1}}{1 - \text{tang}\, z . \sqrt{-1}} = e^{2z.\sqrt{-1}}.$$

Dividirt man noch (VII.) durch (VI.), ſo folgt:

$$\text{IX.)}\quad \text{tang}\, z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}\right)}.$$

Aus der Reihe in (III.) läßt ſich die Reihe

$$\text{X)}\quad z = \sin z + \frac{1.}{2.}\,\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1.3.}{2.4.}\,\frac{\sin^5 z}{5} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\,\frac{\sin^7 z}{7} + \ldots$$

entwickeln. Denn es iſt:

$$\text{tang}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \sin z . \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sin z (1 - \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}};$$

ſetzt man $\sin z (1 - \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}}$ dort für tang z, ſo giebt die Entwickelung der Potenzen von $(1 - \sin^2 z)$ die bemerkte Reihe.

§. 7.

An die exponentiellen Ausdrücke des vorigen §. knüpft ſich folgende merkwürdige, von Delambre zuerſt allgemein aufgeſtellte und, bei der Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke nützliche Reihe:

I.) Wenn zwiſchen den Bogen (oder Winkeln) y und x die Gleichung

$$\text{tang}\, y = \frac{n \sin x}{1 - n \cos x}$$

ſtatt findet, ſo iſt:

$$y = n\sin x + \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3x + \tfrac{1}{4}n^4\sin 4x + \ldots,$$

welche Reihe um ſo ſchneller konvergirt, je kleiner n iſt. Denn es iſt nach §. 6. VIII.

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1+\operatorname{tang} y.\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang} y.\sqrt{-1}}.$$

Setzt man hier für tang y aus obiger Gleichung $\frac{n\sin x}{1-n\cos x}$ ein, ſo iſt:

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1+\frac{n\sin x}{1-n\cos x}.\sqrt{-1}}{1-\frac{n\sin x}{1-n\cos x}.\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1-n\cos x+n\sin x.\sqrt{-1}}{1-n\cos x-n\sin x.\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1-n(\cos x-\sin x.\sqrt{-1})}{1-n(\cos x+\sin x.\sqrt{-1})}.$$

Für $(\cos x+\sin x.\sqrt{-1})$ und $(\cos x-\sin x.\sqrt{-1})$ die oben IV. und V. bemerkten Werthe geſetzt, giebt,

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1-ne^{-x\sqrt{-1}}}{1-ne^{x\sqrt{-1}}};$$

daher, wenn die Logarithmen beider Theile genommen werden,

$$\log e^{2y\sqrt{-1}} = \log\left(1-ne^{-x\sqrt{-1}}\right) - \log\left(1-ne^{x\sqrt{-1}}\right);$$

$$\text{d. i. } 2y\sqrt{-1} = -\Big[ne^{-x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3e^{-3x\sqrt{-1}} + \ldots\Big] + ne^{x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2e^{2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3e^{3x\sqrt{-1}} + \ldots$$

$$= n\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right) + \tfrac{1}{2}n^2\left(e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}\right) + \ldots$$

Daher, wenn man mit $2\sqrt{-1}$ dividirt,

$$y = n\frac{\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2\frac{\left(e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3\frac{\left(e^{3x\sqrt{-1}} - e^{-3x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \ldots$$

Nun iſt $\frac{e^{rx\sqrt{-1}} - e^{-rx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin rx$, daher

$y = n \sin x + \frac{1}{2} n^2 \sin 2x + \frac{1}{3} n^3 \sin 3x + \ldots.$

II.) Aus der Gleichung

$$\tang y = \frac{n \sin x}{1 + n \cos x} \text{ erhält man}$$

$y = n . \sin x - \frac{1}{2} n^2 . \sin 2x + \frac{1}{3} n^3 . \sin 3x - \frac{1}{4} n^4 . \sin 4x + \ldots$

Denn ſetzt man $x = \pi - x'$, ſo wird $\tang y = \frac{n . \sin x'}{1 - n \cos x'}$ daher nach (I.)

$y = n \sin x' + \frac{1}{2} n^2 \sin 2x' + \frac{1}{3} n^3 \sin 3x' + \ldots.$

Aus $x = \pi - x'$ oder $x' = \pi - x$ folgt $rx' = r\pi - rx$; daher $\sin rx' = \sin(r\pi - rx) = -\cos r\pi . \sin rx$. Jenachdem nun r eine gerade oder ungerade Zahl iſt, iſt $\cos r\pi = +1$ oder $= -1$; alſo $\sin rx' = -\sin rx$ oder $= +\sin rx$; daher $y = n \sin x - \frac{1}{2} n^2 \sin 2x + \frac{1}{3} n^3 \sin 3x - \ldots$

III.) Iſt die Gleichung zwiſchen y und x

$$\tang y = \frac{n . \cos x}{1 - n \sin x}; \text{ ſo iſt:}$$

$y = n \cos x + \frac{1}{2} n \sin 2x - \frac{1}{3} n^3 \cos 3x - \frac{1}{4} n^4 \sin 4x + \ldots.$

Setzt man nämlich $x = \frac{1}{2}\pi - x'$, ſo erhält man die Reihe in (I.) für y und x'. Für $\sin rx'$ ſubſtituire man dann die Werthe

$+\cos rx, \quad +\sin rx, \quad -\cos rx, \quad -\sin rx,$

jenachdem

$r = 4\varrho + 1, \quad 4\varrho + 2, \quad 4\varrho + 3, \quad 4\varrho$ iſt.

IV.) Für die Gleichung

$$\tang y = \frac{n \cos x}{1 + n \sin x}$$

iſt $y = n \cos x - \frac{1}{2} n^2 \sin 2x - \frac{1}{3} n^3 \cos 3x + \frac{1}{4} n^4 \sin 4x + \ldots.$ welche Reihe ſich aus (III.) ſogleich ergiebt, wenn man in der vorliegenden Gleichung $x = -x'$ ſetzt. Für $\sin rx'$ hat man dann $-\sin rx$ zu reſtituiren.

Anmerk. Da $\tang \frac{1}{2} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ iſt (§. 2, 35.), ſo erhält man aus (II.), wenn dort für y und n geſetzt wird $\frac{1}{2}x$ und 1,

die Reihe

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots.$$

oder $x = 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots.)$.

Entwickelt man hier $\sin 2x$, $\sin 3x$, u. ſ. w. nach Potenzen von x (§. 6, I.) ſo erhält man:

$$\tfrac{1}{2}x = (1-1+1-1+1-1+\ldots..)x - (1-2^2+3^2-4^2+\ldots.)\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ (1-2^4+3^4-4^4+\ldots.)\frac{x^5}{1.2.3.4.5.}$$
$$- (1-2^6+3^6-4^6+\ldots.)\frac{x^7}{1\,2\ldots.7}$$

Die Summe der unendlichen Reihe $1 - 1 + 1 - \ldots$ iſt $= \tfrac{1}{2}$; die der übrigen Null; man erhält alſo $\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x$. Da dies a priori beſtimmt werden konnte, ſo kann man umgekehrt auf jene Reihen ſchließen.

V.) Auf die Form der Gleichung $\operatorname{tang} y = \frac{n \sin x}{1 - n \cos x}$ läßt ſich die häufig vorkommende Gleichung

$$\operatorname{tang} z = p.\operatorname{tang} u$$

bringen. Denn es iſt:

1) $$\operatorname{tang}(z-u) = \frac{\operatorname{tang} z - \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang} z.\operatorname{tang} u} = \frac{p \operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u}{1 + p \operatorname{tang}^2 u}$$
$$= \frac{(p-1)\operatorname{tang} u}{1 + p \operatorname{tang}^2 u} = \frac{(p-1)\cos u \sin u}{\cos^2 u + p \sin^2 u}$$
$$= \frac{(p-1)\cos u.\sin u}{\tfrac{1}{2}(1+\cos 2u) + p\tfrac{1}{2}(1-\cos 2u)} = \frac{(p-1)\sin 2u}{1 + p - (p-1)\cos 2u}$$
$$= \frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2u}{1 - \left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2u}$$

2) $$\operatorname{tang}(z+u) = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} u} = \frac{(p+1)\operatorname{tang} u}{1 - p \operatorname{tang}^2 u}$$
$$= \frac{(p+1)\cos u.\sin u}{\cos^2 u - p \sin^2 u} = \frac{(p+1)\sin 2u}{1 + \cos 2u - p(1-\cos 2u)}$$
$$= \frac{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\sin 2u}{1 - \left(\frac{p+1}{p-1}\right)\cos 2u}.$$

3) Setzt man $p=\frac{1}{p'}$, ſo verwandelt ſich die Gleichung $\tang z = p \tang u$ in folgende:

$$\tang u = p' \tang z.$$

Aus (1) erhält man daher, wenn dort z und u verwechſelt werden und p' für p eintritt

$$\tang(u-z) = \frac{\frac{p'-1}{p'+1}\sin 2z}{1-\frac{p'-1}{p'+1}\cos 2z} = \frac{\frac{1-p}{1+p}\sin 2}{1-\frac{1-p}{1+p}\cos 2z}$$

oder

$$(\tang z-u) = \frac{\frac{p-1}{p+1}\sin 2z}{1+\frac{p-1}{p+1}\cos 2z}.$$

Eben ſo ergiebt ſich aus (2)

$$\tang(z+u) = \frac{\frac{p'+1}{p'-1}\sin 2z}{1-\frac{p'+1}{p'-1}\cos 2z}$$

$$= \frac{\frac{1+p}{1-p}\sin 2z}{1-\frac{1+p}{1-p}\cos 2z}.$$

Demnach folgt aus der Gleichung $\tang z = p \tang u$

1) $$\tang(z-u) = \frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2u}{1-\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2u} = \frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2z}{1+\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2z};$$

2) $$\tang(z+u) = \frac{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\sin 2u}{1-\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\cos 2u} = \frac{\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\sin 2z}{1-\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\cos 2z}.$$

Man kann alſo $\tang(z-u)$ und $\tang(z+u)$ durch Reihen ausdrücken, die nach den Sinus der Vielfachen von u oder von z fortſchreiten.

Goniometriſche Gleichungen.

§. 8.

Die Auflöſung einer goniometriſchen Gleichung kann direkt oder indirekt geſchehen, jenachdem eine Funktion des geſuchten

Bogens (oder Winkels) unmittelbar entwickelt, oder die Beſtimmung deſſelben von einer einzuführenden Hülfsgröße abhängig gemacht wird. Letzteres iſt der logarithmiſchen Berechnung wegen und beſonders dann vorzuziehen, wenn die direkte Auflöſung auf eine Gleichung des zweiten, oder eines höheren Grades führen würde. Unter den trigonometriſchen Gleichungen gehören hieher diejenigen, welche von der Form

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

alſo in Bezug auf $\sin x$ und $\cos x$ vom zweiten Grade ſind. Die meiſten Gleichungen für ſphäriſche Dreiecke haben dieſe Form; daher dieſe Gleichung hier näher unterſucht werden ſoll, beſonders in Rückſicht der verſchiedenen Werthe, welche ſie für x zuläßt und deren Abhängigkeit von den Koeffizienten α, β, γ. Um die logarithmiſche Berechnung zu erleichtern ſetze man:

$$1)\ \alpha = n \cos\varphi; \qquad 2)\ \beta = n \sin\varphi;$$

ſo ergiebt ſich für die Beſtimmung von φ und n

$$\tang\varphi = \frac{\beta}{\alpha};\ n = \frac{\alpha}{\cos\varphi} = \frac{\beta}{\sin\varphi};$$

Die Gleichung verwandelt ſich dann in folgende:

$$n(\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi) = \gamma; \text{ d. i.}$$

$$n \,.\, \sin(x + \varphi) = \gamma$$

daher $\sin(x+\varphi) = \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma \cdot \cos\varphi}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi}{\beta}$;

Bezeichnet man $x + \varphi$ durch ψ, ſo iſt:

$$x = \psi - \varphi$$

wo φ und ψ durch die Gleichungen $\tang\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ und

$$\sin\psi = \frac{\gamma \cdot \cos\varphi}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi}{\beta} \text{ beſtimmt ſind.}$$

Um die möglichen Werthe von x zu beſtimmen, müſſen die möglichen Werthe von ψ mit denen von φ verbunden werden. Aus der Gleichung $\tang\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, folgt nun

$$\varphi = r\pi + \varphi'$$

wo φ' den kleinſten zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ gehörigen Bogen bedeu-

tet, der jedenfalls $< \frac{1}{2}\pi$ und poſitiv oder negativ, wie die Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$, iſt.

Aus $\sin\psi = \frac{\gamma . \sin\varphi}{\beta}$ folgt dann $\sin\psi = \frac{\gamma . \sin(r\pi + \varphi')}{\beta}$ $= \frac{\gamma . \cos r\pi . \sin\varphi}{\beta}$. Je nachdem nun r eine gerade oder ungerade Zahl iſt, iſt $\cos r\pi = +1$ oder $= -1$; daher:

$$\sin\psi = +\frac{\gamma . \sin\varphi'}{\beta} \text{ für } r = 2\varrho$$

$$\text{oder } \ldots\ldots = -\frac{\gamma . \sin\varphi'}{\beta} \text{ für } r = (2\varrho + 1).$$

Bezeichnet man auch mit ψ' den kleinſten Bogen, deſſen Sinus $= \frac{\gamma . \sin\varphi'}{\beta}$ iſt, ſo ſind die möglichen Werthe von ψ

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \psi = 2\varrho'\pi + \psi' \\ \text{und } \ldots\ldots = (2\varrho' + 1)\pi - \psi' \end{array}\right\} \text{ wenn } r = 2\varrho \text{ iſt;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \psi = 2\varrho'\pi - \psi' \\ \text{und } \ldots\ldots = (2\varrho' + 1)\pi + \psi' \end{array}\right\} \text{ wenn } r = 2\varrho + 1 \text{ iſt.}$$

Hieraus ergeben ſich für $x = \psi - \varphi$ die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x = 2\varrho'\pi + \psi' - 2\varrho\pi - \varphi' \\ \quad = 2(\varrho' - \varrho)\pi + \psi' - \varphi' \\ \text{und } \ldots\ldots = (2\varrho' + 1)\pi - \psi' - 2\varrho\pi - \varphi \\ \quad = (2\varrho' - 2\varrho + 1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{array}\right\} \text{ für } r = 2\varrho;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ x = 2\varrho'\pi - \psi' - (2\varrho + 1)\pi - \varphi' \\ \quad = (2\varrho' - 2\varrho - 1)\pi - (\psi' + \varphi') \\ \text{und } \ldots\ldots = (2\varrho' + 1)\pi + \psi' - (2\varrho + 1)\pi - \varphi' \\ \quad = 2(\varrho' - \varrho)\pi + \psi' - \varphi' \end{array}\right\} \text{ für } r = 2\varrho + 1.$$

Da in dieſen vier Ausdrücken $2(\varrho' - \varrho)$ überhaupt nur eine beliebige grade Zahl und eben ſo $(2\varrho' - 2\varrho + 1)$ und $(2\varrho' - 2\varrho - 1)$ eine ungrade Zahl ausdrücken, ſo laſſen ſich dieſelben auf zwei Formeln zurückführen, wenn die ungrade Zahl durch $2\varrho + 1$, die grade durch 2ϱ bezeichnet wird. Dann erhält man die ſämmtlichen Werthe von x in den beiden Ausdrücken

$$1)\ x = 2\varrho\pi + \psi' - \varphi';$$

$$2)\ x = (2\varrho + 1)\pi - (\psi' + \varphi'); \quad (A)$$

wo für ϱ jede ganze, poſitive oder negative, Zahl genommen werden kann.

Daß der Bogen φ' poſitiv und negativ ſein kann, nachdem die Tangente deſſelben $\frac{\beta}{\alpha}$ poſitiv oder negativ iſt, wurde bereits bemerkt. Es geht hieraus hervor, daß φ' poſitiv iſt, wenn die Koeffizienten α, β gleichartig ſind in Rückſicht ihrer Qualität; negativ aber, wenn α, β ungleichartig ſind. Eben ſo hängt die Qualität des ψ' von der Zeichenrelation zwiſchen α und γ ab. Denn es iſt $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \cos\varphi'}{\alpha}$. Da hier $\varphi' < \frac{1}{2}\pi$ iſt, ſo iſt $\cos\varphi'$ poſitiv, φ' mag poſitiv oder negativ ſein. Daher richtet ſich die Qualität von $\sin\psi'$, folglich auch die von ψ' ſelbſt, nur nach der zwiſchen α und γ vorhandenen Zeichenbeziehung, und zwar iſt ψ' poſitiv, wenn α, γ gleichartig; negativ wenn dieſe ungleichartig ſind.

Die in (A) aufgeſtellte Formel läßt ſich leicht auf alle Fälle anwenden, welche hinſichtlich der Vorzeichen der Koeffizienten α, β, γ ſtatt finden können. Iſt die Gleichung z. B.

$$-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

ſo ſetze man $\quad -\alpha = \alpha'$; alſo

$$\alpha' \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

ſo iſt: $\quad x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \psi' - \varphi' \quad \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$

wo $\tang\varphi' = \frac{\beta}{\alpha'}$; $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$. Da $\frac{\beta}{\alpha'} = -\frac{\beta}{\alpha}$ ſo iſt der kleinſte zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha'}$ gehörige Bogen φ' entgegengeſetzt dem zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ gehörigen φ''; eben ſo iſt ψ', deſſen Sinus $= \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ entgegengeſetzt dem zum entgegengeſetzten Sinus $\frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$ gehörigen kleinſten Bogen ψ''. Setzt man alſo in der Formel für x die Bogen $-\varphi''$ und $-\psi''$ für φ' und ψ', ſo erhält man:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \varphi'' - \psi'' & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi + (\varphi'' + \psi'') \end{cases}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\beta}{\alpha}$; $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$.

§. 9.

Um die Werthe, welche die Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ für x zwiſchen den Grenzen 0 und π zuläßt, zu beſtimmen, wollen wir die verſchiedenen Fälle, welche in Rückſicht der Zeichen- und Größenbeziehungen der Koeffizienten α, β, γ ſtatt finden, unterſcheiden. Werden die negativen Werthe dieſer Koeffizienten auf das Subtraktionszeichen (—) reduzirt, ſo daß den Größen α, β, γ ſelbſt nur poſitive Werthe bleiben; ſo ſind die möglichen Fälle der Zeichenfolgen und Zeichenwechſel folgende:

1) $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$;
2) $\alpha \sin x - \beta \cos x = \gamma$;
3) $-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$;
4) $\alpha \sin x + \beta \cos x = -\gamma$.

I.) Für die Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ iſt:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \psi' - \varphi' & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\beta}{\alpha}$; $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$, alſo φ', wie ψ' poſitiv iſt. Aus der Gleichung $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ oder

$\frac{\sin\psi'}{\sin\varphi'} = \frac{\gamma}{\beta}$ folgt nun:

1) Wenn $\gamma < \beta$; ſo iſt $\psi' < \varphi'$; die Differenz $\psi' - \varphi'$ alſo negativ. Die Summe $\psi' + \varphi'$ iſt poſitiv und $< \pi$. Schreibt man alſo in der Formel für $x - (\varphi' - \psi')$ ſtatt $\psi' - \varphi'$ ſo iſt:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\varphi' - \psi') & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\varphi' + \psi'). \end{cases}$$

Hier liegt nur ein Werth zwiſchen 0 und π. Der zweite Theil der Formel giebt nämlich für $\varrho = 0$

$$x = \pi - (\varphi' + \psi');$$

2) Iſt aber $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi' > \varphi'$; daher $(\psi' - \varphi')$ und $(\psi' + \varphi')$ poſitiv und $< \pi$. In der Formel

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' - \varphi') \quad \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$$

erhält man für $\varrho = 0$ zwei Werthe zwiſchen 0 und π, nämlich $x = \psi' - \varphi$ und $x = \pi - (\psi' + \varphi')$.

Für $\gamma = \beta$ iſt $x = 0$ und $x = \pi - 2\varphi'$ oder $\pi - 2\psi'$, da φ' und ψ' alsdann gleich werden.

II.) In der Gleichung $\alpha \sin x - \beta \cos x = \gamma$ oder $\alpha \sin x + \beta' \cos x = \gamma$, wenn nämlich $\beta' = -\beta$ geſetzt wird, iſt das φ' der allgemeinen Formel negativ, weil α und β' ungleichartig ſind; ψ' bleibt poſitiv. Setzt man alſo φ'' für $-\varphi'$, wo dann φ'' poſitiv iſt, ſo iſt:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' + \varphi'') \quad \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi - (\psi' - \varphi''). \end{cases}$$

Aus $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta'}$ folgt $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$ daher

$$\frac{\sin\psi'}{\sin\varphi''} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

1) Iſt nun $\gamma < \beta$; ſo iſt $\psi' < \varphi''$; daher $(\psi' - \varphi'')$ negativ und

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' + \varphi'') \quad \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi + (\varphi'' - \psi'). \end{cases}$$

Für $\varrho = 0$ giebt der erſte Theil der Formel $x = \psi' + \varphi''$; der zweite Theil enthält keinen Werth zwiſchen 0 und π. Alſo hat x nur einen Werth, wenn $\gamma < \beta$ iſt.

2) Iſt $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi' > \varphi''$; daher $\psi' - \varphi''$ poſitiv und für $\varrho = 0$ erhält man zwei Werthe:

$$x = \psi' + \varphi'' \quad \text{und} \quad x = \pi - (\psi' - \varphi'').$$

Für $\gamma = \beta$ iſt $\psi' = \varphi'$; daher $x = \pi$ und $x = 2\varphi''$.

III.) In der dritten Gleichung $-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$, oder, wenn α' für $-\alpha$ geſetzt wird

$$\alpha' \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

ſind die Bogen φ' und ψ' der allgemeinen Formel negativ, da α', β ſo wie α', γ ungleichartig ſind.

Setzt man daher $-\varphi''$ und $-\psi''$ für φ', ψ', ſo iſt:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\psi'' - \varphi'') \text{ und} \\ (2\varrho+1)\pi + (\psi'' + \varphi'') \end{cases}$$

und $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$ oder $\frac{\sin\psi''}{\sin\varphi''} = \frac{\gamma}{\beta}$.

1) Iſt $\gamma < \beta$; ſo iſt $\psi'' < \varphi''$, alſo $(\psi'' - \varphi'')$ negativ. Für $\varrho = 0$ erhält man daher in dem erſten Theile der Formel einen Werth; nämlich $x = \varphi'' - \psi''$. Der zweite Theil giebt keinen.

2) Iſt $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi'' > \varphi''$; daher $(\psi'' - \varphi'')$ poſitiv. Hier findet ſich für keinen Werth von ϱ ein zwiſchen 0 und π liegender Werth von x.

Iſt $\gamma = \beta$; ſo findet ſich $x = 0$.

IV.) In der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = -\gamma$ oder, wenn γ' für $-\gamma$ geſetzt wird: $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma'$ iſt ψ' negativ, φ' poſitiv; daher, wenn $-\psi''$ für ψ' geſetzt wird:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\varphi' + \psi'') \text{ und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\varphi' - \psi''). \end{cases}$$

Aus $\sin\psi' = \frac{\gamma' \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ folgt $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ oder

$\frac{\sin\psi''}{\sin\varphi'} = \frac{\gamma}{\beta}$.

1) Iſt $\gamma < \beta$; ſo iſt $\psi'' < \varphi'$ daher für $\varrho = 0$ ein Werth, nämlich $x = \pi - (\varphi' - \psi'')$.

2) Iſt $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi'' > \varphi'$ daher $\varphi'' - \psi''$ negativ. Hier iſt kein Werth von x zwiſchen o und π möglich. Für $\gamma = \beta$ iſt $x = \pi$.

Vergleichen wir dieſe vier Fälle, ſo zeigt ſich, daß x 1) immer einen und nur einen Werth zwiſchen o und π hat, wenn $\gamma < \beta$ iſt. Iſt aber 2) $\gamma > \beta$, ſo hat x entweder zwei Werthe, oder keinen; jenes, wenn ψ' poſitiv, dieſes, wenn ψ' negativ iſt; oder: zwei Werthe hat x, wenn α und γ gleichartig ſind; keinen, wenn α und γ ungleichartig ſind. In beiden Fällen ſind die zwiſchen o und π möglichen Werthe von der Form $\psi' - \varphi'$, oder $\pi - (\psi' + \varphi')$,

wo ψ', φ' poſitiv oder negativ ſind, jenachdem in der allgemeinen Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$
α, β und α, γ gleichartig oder ungleichartig ſind. Faſſen wir daher alle Fälle zuſammen, ſo iſt

1) wenn $\gamma < \beta$

$$x = \left\{\begin{matrix} \pi - (\psi' + \varphi') \\ \text{oder} \\ \psi' - \varphi' \end{matrix}\right\} \text{jenachdem } \alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{oder} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\} \text{mit } \beta$$

2) wenn $\gamma > \beta$

$$x = \left\{\begin{matrix} (\psi' - \varphi') \text{ und } \pi - (\psi' + \varphi') \\ \text{oder} \\ \text{unmöglich} \end{matrix}\right\} \text{jenachdem } \alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{oder} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\} \text{mit } \gamma.$$

Aus dem Umſtande, daß in den innerhalb der genannten Grenzen für x möglichen Werthen — nämlich $\psi' - \varphi'$ und $\pi - (\psi' + \varphi')$ oder $[(\pi - \psi') - \varphi']$ — beidemale φ' ſubtraktiv ſteht und ſich entweder mit ψ' oder mit $(\pi - \psi')$ verbindet, ergiebt ſich eine andere Darſtellung der geſuchten Werthe, die in dem Falle, wenn in der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ nur poſitive Werthe von x zwiſchen o und π vorausgeſetzt werden, vortheilhafter iſt. Man kann nämlich in der Gleichung $\tan \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ den Bogen φ ſogleich auf den kleinſten Werth (φ') beſchränken; in der Gleichung $\sin \psi = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi}{\beta}$ aber für ψ den kleinſten Werth (ψ') und deſſen Supplement $(\pi - \psi')$ — das bei einem negativen φ' größer als π wird — nehmen. Indem alsdann der Bogen ψ zweideutig wird, läßt ſich die Zweideutigkeit der Gleichung

$$x = \psi - \varphi$$

auf folgende Weiſe entſcheiden:

1) Wenn $\gamma \leqq \beta$

ſo iſt $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem $\alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\}$ mit β;

2) Wenn $\gamma > \beta$

ſo iſt $\left\{\begin{matrix}\psi \text{ zweideutig} \\ \text{oder } x \text{ unmöglich}\end{matrix}\right\}$ jenachdem $\alpha \left\{\begin{matrix}\text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ mit γ iſt.

§. 10.

Auf die Form der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ laſſen ſich viele Gleichungen von andern Formen bringen. So wird die Gleichung $A \sin^2 x + B \sin x \cos x = C$, welche in Bezug auf $\sin x$ und $\cos x$ vom vierten Grade iſt, dahin reduzirt, wenn man für $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$ die Werthe $\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\frac{\sin 2x}{2}$, ſubſtituirt. Man erhält dann:

$$B \sin 2x - A \cos 2x = 2C - A$$

$$\text{daher}\quad x = \begin{cases}\varrho\pi + \tfrac{1}{2}(\psi' - \varphi') & \text{und} \\ \varrho\pi + \tfrac{1}{2}(\pi - \psi' - \varphi') & (\text{§. } 8.)\end{cases}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{A}{B}$; $\sin\psi' = \frac{(2C - A)\cos\varphi'}{B}$.

Eben ſo die Gleichung $A \operatorname{tang}^2 x + B \operatorname{tang} x = C$, wenn man beide Theile mit $\cos^2 x$ multiplizirt und dann wie vorher verwandelt. Es ergiebt ſich dann:

$$B \sin 2x - (A + C) \cos 2x = C - A.$$

Eine vortheilhaftere Auflöſung dieſer Gleichung bieten die §. 2. No. 31. und 32. bemerkten Formeln dar. Iſt nämlich

1) in der Gleichung $A \operatorname{tang}^2 x + B \operatorname{tang} x = C$ der zweite Theil C poſitiv, ſo ſetze man $\operatorname{tang} x = z . \sqrt{\frac{C}{A}}$ und dividire die Gleichung durch 1, ſo erhält man:

$$z^2 + \frac{B}{\sqrt{A.C}}\, z = 1.$$

Nimmt man $\frac{B}{\sqrt{AC}} = \frac{2}{\operatorname{tang}\varphi}$ alſo $\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$, ſo wird:

$$z^2 + \frac{2}{\operatorname{tang}\varphi} . z = 1.$$

Nun iſt aber $\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{2}{\operatorname{tang}\varphi} . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = 1$; alſo $z = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi$.

Aus $\tang \varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$ folgt $\varphi = r\pi + \varphi'$; $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}r\pi + \frac{1}{2}\varphi'$, daher $\tang \frac{1}{2}\varphi$ ſowohl $= \tang \frac{1}{2}\varphi'$ als $= -\cotg \frac{1}{2}\varphi'$; mithin $z = \tang \frac{1}{2}\varphi'$ und $= -\cotg \frac{1}{2}\varphi'$.

Da $\tang x = z\sqrt{\frac{C}{A}}$ iſt, ſo erhält man:

$$\tang x = \tang \tfrac{1}{2}\varphi' \sqrt{\frac{C}{A}}$$

und ...... $= -\cotg \frac{1}{2}\varphi' \sqrt{\frac{C}{A}}$.

2) Iſt C negativ, ſo ſetze man $C = -C'$. Aus der Gleichung $A \tang^2 x + B \tang x = -C'$ erhält man wie oben

$$z^2 - \frac{B}{\sqrt{AC}} \cdot z = -1$$

wenn $\tang x = -z\sqrt{\frac{C'}{A}}$ geſetzt wird. Nimmt man hier $\frac{B}{\sqrt{AC}} = \frac{2}{\sin\varphi}$, ſo wird:

$$z^2 - \frac{2}{\sin\varphi} z = -1.$$

Da nun $\tang^2 \frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{\sin\varphi} \cdot \tang \frac{1}{2}\varphi = -1$ iſt; ſo folgt: $z = \tang \frac{1}{2}\varphi$. Aus $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$ erhält man $\varphi = 2\varrho\pi + \varphi'$ und $= 2r\pi + (\pi - \varphi')$ daher $\tang \frac{1}{2}\varphi = \tang \frac{1}{2}\varphi'$ und $= \cotg \frac{1}{2}\varphi'$; folglich $z = \tang \frac{1}{2}\varphi'$ und $= \cotg \frac{1}{2}\varphi'$; endlich:

$$\tang x = -\tang \tfrac{1}{2}\varphi' \sqrt{\frac{C}{A}}$$

und ..... $= -\cotg \frac{1}{2}\varphi' \sqrt{\frac{C}{A}}$.

Von dieſer Auflöſung läßt ſich auch auf die Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ Anwendung machen. Denn ſetzt man $2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x$ und $2\cos^2 \frac{1}{2}x - 1$ reſp. für $\sin x$ und $\cos x$ und dividirt dann mit $\cos^2 \frac{1}{2}x \left(= \frac{1}{1 + \tg^2 \frac{1}{2}x}\right)$ ſo erhält man: $(\beta + \gamma) \tang^2 \frac{1}{2}x - \alpha \tang \frac{1}{2}x = \beta - \gamma$.

Die in §. 9. gefundenen Bedingungen, unter welchen zwiſchen o und π nur ein Werth, oder zwei, oder keiner möglich iſt, laſſen ſich auch hier und noch einfacher nachweiſen.

Gleichungen für ſphäriſche Dreiecke.

§. 11.

Um aus gegebenen Stücken eines ſphäriſchen Dreieckes eines der übrigen durch Rechnung zu finden, iſt eine Gleichung zwiſchen **vier** Größen zu ſuchen, indem **drei** Stücke zur Beſtimmung eines Dreieckes erforderlich und hinreichend ſind. Eine vollſtändige Löſung der Aufgabe, aus beliebigen drei Stücken jedes der übrigen zu finden, bedingt demnach ſo viel Gleichungen, als unter den Elementen a, b, c, A, B, C, — den Seiten und Winkeln des ſphäriſchen Dreieckes — Verbindungen zu vieren möglich ſind, alſo 15 Gleichungen für die 15 Verbindungen.

abcA	abAB	acAB	bcAB	aABC
abcB	abAC	acAC	bcAC	bABC
abcC	abBC	acBC	bcBC	cABC

Wenn indeß dieſe Gleichungen **allgemeingültig** ſind, alſo von beſonderen Werthen der einzelnen Stücke unabhängig nur die durch die Lage derſelben gegen einander bedingten wechſelſeitigen Beziehungen der Größe ausſprechen; ſo können unter denſelben nur ſo viel weſentlich verſchiedene ſein, als weſentliche Verſchiedenheiten in der Lage von je vier Stücken des Dreiecks möglich ſind und es muß eine und dieſelbe Form der Gleichung für alle diejenigen Stücke ſtatt finden, welche in dieſer Rückſicht unter gleichen Beziehungen ſtehen. Hat man z. B. für die Seite a, b und die Winkel C, A eine allgemeingültige Gleichung

$$F(a, b, C, A) = o$$

die alſo nur überhaupt die gegenſeitige Abhängigkeit ausdrückt, welche zwiſchen irgend zwei Seiten, dem eingeſchloſſenen Winkel und dem einer dieſer Seiten gegenüberliegenden Winkel ob-

waltet; ſo iſt damit auch die Abhängigkeit unter den vier Stücken a, b, C, B gegeben, in denen die Seite b ſich der Lage nach zu a, C, B eben ſo verhält, wie a zu b, C, A; alſo die Gleichung

F(b, a, C, B)

gegeben, in welcher a und b ihre vorigen Funktionen vertauſchen, indem zugleich B für A eintritt.

Es ergiebt ſich hieraus, daß in jeder allgemeinen Gleichung zwiſchen Seiten und Winkeln eines ſphäriſchen Dreieckes jede Seite nebſt dem ihr gegenüberliegenden Winkel verwechſelt werden kann gegen jede andere Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel. *)

Demnach gehören in den oben aufgeſtellten 15 Verbindungen diejenigen, welche nur durch ſolche Verwechſelungen ſich von einander unterſcheiden unter eine und dieſelbe Gleichung und es bleiben als weſentlich verſchiedene nur 4 Gruppen derſelben übrig, für welche eben ſo viel verſchiedene Gleichungen erforderlich ſeyn werden, die ſich vorläufig durch:

F(a, b, c, A) = o (I.) (für 3 Verbindungen),
F(a, b, A, B) = o (II.) (für 3 Verb.),
F(a, b, A, C) = o (III.) (für 6 Verb.),
F(a, A, B, C) = o (IV.) (für 3 Verb.)

andeuten laſſen.

Der oben ausgeſprochene Grundſatz der Vertauſchung, durch welchen auch die Entwickelungen der trigonometriſchen Gleichungen und Formeln vortheilhaft abgekürzt und vereinfacht werden, leidet noch größere Ausdehnung. Denn wie aus einer allgemeinen Gleichung

F(a, b, c, A, B, C) = o (α)

durch Vertauſchung von a, A mit b, B die andere eben ſo allgemeine Gleichung:

*) Allgemein muß die Gleichung ſein. Denn von Gleichungen, welche etwa von rechtwinkligen oder gleichſchenkligen Dreiecken hergenommen ſein möchten, kann das hier Geſagte nicht unumſchränkt gelten.

$$F(b, a, c, B, A, C) = o$$

hergeleitet wird, ſo kann in dieſer wieder a, A mit c, C verwechſelt werden, wodurch ſich die Gleichung

$$F(b, c, a, B, C, A) = o$$

ergiebt, welche unmittelbar aus (α) abgeleitet wird, wenn man jede Seite und jeden Winkel mit dem nächſtfolgenden vertauſcht, wobei auf das letzte Element c, C das erſte a, A folgt. Verwechſelt man umgekehrt erſt a, A mit c, C; dann mit b, B, ſo erhält man

$$F(c, a, b, C, A, B) = o,$$

wo jedes Element mit dem **vorhergehenden** wechſelt. Es kann alſo in einer allgemeingültigen Gleichung jedes der Elemente a, b, c und A, B, C mit dem folgenden oder mit dem vorhergehenden vertauſcht werden.

Ein zweites Hülfsmittel zur Abkürzung des trigonometriſchen Kalkuls bietet eine zweite, auf der Polarität der ſphäriſchen Dreiecke beruhende Vertauſchungsregel dar. Denn da jedes ſphäriſche Dreieck ein Polardreieck hat, ſo giebt jede allgemeine Gleichung

$$F(a, b, c, A, B, C) = o,$$

da ſie auf das Polardreieck angewendet werden kann, eine zweite Gleichung

$$F(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = o,$$

die aus der erſten abgeleitet wird, wenn jede Seite mit dem Supplemente des gegenüberliegenden Winkels, und umgekehrt, wechſelt. **Man kann alſo in jeder allgemeinen Gleichung für jede Seite und jeden Winkel die Supplemente der gegenüberliegenden Winkel und Seiten ſetzen.**

Hieraus iſt klar, wie die vierte der obigen Hauptgleichungen mittelſt dieſer Vertauſchung ſich aus der erſten muß ableiten laſſen; mithin eigentlich nur **drei** Hauptgleichungen zu entwickeln ſeyn werden.

Eine dritte Vertauſchung anderer Art ergiebt das **Neben-**

dreieck. Jedes ſphäriſche Dreieck $\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ A & B & C \end{Bmatrix}$ hat die Nebendreiecke $\begin{Bmatrix} \overline{\alpha} & \beta & \gamma \\ a & \overline{b} & \overline{c} \\ A & \overline{B} & \overline{C} \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \alpha & \overline{\beta} & \gamma \\ \overline{a} & b & \overline{c} \\ \overline{A} & B & \overline{C} \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \overline{\gamma} \\ \overline{a} & \overline{b} & c \\ \overline{A} & \overline{B} & C \end{Bmatrix}$, von denen jedes eine Seite und den gegenüberliegenden Winkel mit jenem gemein hat, während die übrigen Seiten und Winkel die Supplemente der übrigen Seiten und Winkel des andern Dreieckes ſind. Die allgemeingültige Gleichung

$$F(a, b, c, A, B, C) = 0$$

auf das Nebendreieck $(\overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ angewendet, giebt alſo eine andere Gleichung:

$$F(a, \overline{b}, \overline{c}, A, \overline{B}, \overline{C}) = 0$$

die, wenn ſie nicht identiſch mit der vorigen iſt, eine neue Relation zwiſchen den Seiten und Winkeln des Dreiecks (α, β, γ) ergiebt. **Demnach können in jeder Gleichung jede zwei Seiten nebſt den gegenüberliegenden Winkeln** (ſie mögen beide in der Gleichung enthalten ſeyn, oder nicht) **vertauſcht werden gegen ihre Supplemente.**

Wendet man endlich eine allgemeingültige Gleichung auf ein Nebendreieck des Polardreieckes, etwa $\begin{Bmatrix} \overline{a}, & b, & c \\ \overline{A}, & B, & C \\ \overline{a}, & b, & c \end{Bmatrix}$ an, ſo erhält man aus $F(a, b, c, A, B, C) = 0$ die Gleichung

$$F(\overline{A}, B, C, \overline{a}, b, c) = 0.$$

Daraus folgt: **Es können in jeder allgemeinen Gleichung zwei Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln vertauſcht werden, indem zugleich die dritte Seite und das Supplement des dritten Winkels, ſo wie der dritte Winkel und das Supplement der dritten Seite mit einander wechſeln.**

we-

Wird z. B. in der Gleichung:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

A, B gegen a, b und C, c reſp. gegen $\overline{c}, \overline{C}$ vertauſcht, ſo erhält man ſogleich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

§. 12.

Aufgabe. Eine allgemeingültige Gleichung zwiſchen den drei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes und einem Winkel desſelben aufzuſtellen.

Auflöſung. Man konſtruire eine ſphäriſche Spindel ABCA′ (Fig. 1.) von beliebigem Winkel, deren Kreisebnen ſich in dem Kugeldurchmeſſer AA′ ſchneiden, deſſen Mittelpunkt — zugleich der Mittelpunkt der Kugel — in M ſei. In jeder der Ebnen ABA′, ACA′, ziehe man von M aus ſenkrecht auf den Durchſchnitt AA′ die Kugelradien MD, ME; der dadurch gebildete Winkel DME iſt der Neigungswinkel der Kreisebenen, alſo = A d. i. dem Winkel der Spindel, und die Ebene desſelben DME ſteht ſenkrecht auf AA′, ſo wie auf beiden Kreisebenen ABA′, ACA′. Wie nun auch das ſphäriſche Dreieck, das als ein Theil der Spindel ABCA′ in A oder A′ einen Winkel hat, beſchaffen ſein mag, ſo finden nur zwei Fälle ſtatt: entweder liegen die andern beiden Winkelpunkte B, C auf einer und derſelben Seite der Neigungsebene DME, wie Fig. 1. in den Dreiecken ABC, A′BC; oder ſie liegen auf entgegengeſetzten Seiten derſelben, wie Fig. 2. in den Dreiecken ABC, A′BC.

1) Es liege B und C auf derſelben Seite von DME (Fig. 1.), oder mit andern Worten: die Seiten AB, AC, oder A′B, A′C ſeyen gleichartig.

Man ziehe die Kugelradien MB, MC und aus einem beliebigen Punkte c der ſenkrechten MD eine grade Linie $c\gamma$ parallel mit AA′, die $\perp$ MD ſich mit MB in γ ſchneidet.

Zieht man dann von γ parallel mit MD die Linie γm, die AA′ in m trifft; von m wieder die mit ME parallele Linie mβ und von β, wo ſie MC ſchneidet, die mit AA′ parallele und zugleich auf ME ſenkrechte L. bβ; ſo iſt $b\beta \# c\gamma$, weil jede $\#$ Mm iſt. Daher iſt das in einer Ebene liegende Viereck $cb\beta\gamma$ ein Parallelogramm und zwar ein rechtwinkliges; weil $c\gamma, b\beta \parallel Mm$ und $Mm \perp DME$; mithin $c\gamma, b\beta \perp DME$, alſo auch $\perp$ bc iſt. Daraus folgt: $cb = \gamma\beta$. — In den ebnen Dreiecken cMb und $\gamma M\beta$ iſt nun nach dem Fundamentalſatze der ebnen Trigonometrie:

$$cb^2 = Mb^2 + Mc - 2Mb.Mc.\cos cMb; \quad (\mathfrak{A})$$
$$\gamma\beta^2 = M\beta^2 + M\gamma^2 - 2M\beta.M\gamma.\cos\gamma M\beta; \quad (\mathfrak{B}).$$

Zieht man ($\mathfrak{A}$) von ($\mathfrak{B}$) ab, ſo erhält man, da $cb = \gamma\beta$,

$$o = (M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) + 2Mb.Mc.\cos cMb - 2M\beta.M\gamma.\cos\gamma M\beta; \quad (\mathfrak{C}).$$

Aus den an c, b rechtwinkligen Dreiecken $Mc\gamma$, $Mb\beta$ folgt nun:

$$M\beta^2 - Mb^2 = b\beta^2;$$
$$M\gamma^2 - Mc^2 = c\gamma^2 = b\beta^2;$$

daher $(M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) = 2b\beta^2 = 2b\beta.c\gamma$. Subſtituirt man dieſen Werth $2b\beta.c\gamma$ in ($\mathfrak{C}$) und bemerkt, daß der Winkel $cMb = A = A'$ und $\gamma M\beta$ = Bogen BC iſt, ſo erhält man:

$$2b\beta.c\gamma + 2Mb.Mc.\cos A - 2M\beta.M\gamma.\cos BC = o;$$

und wenn mit $2M\beta.M\gamma$ dividirt wird:

$$\frac{b\beta.c\gamma}{M\beta.M\gamma} + \frac{Mb.Mc}{M\beta.M\gamma}\cos A - \cos BC = o; \quad (\mathfrak{D}).$$

Die hier entſtandenen Quotienten laſſen ſich nun mittelſt der rechtwinkligen Dreiecke $Mb\beta$, $Mc\gamma$, deren Hypotenuſen $M\beta$, $M\gamma$ ſind, durch die Seiten AB, AC, A′B, A′C der ſphäriſchen Dreiecke ABC, A′BC ausdrücken, nämlich:

$$\frac{b\beta}{M\beta} = \sin bM\beta = \sin EC = \cos AC = -\cos A'C;$$
$$\frac{Mb}{M\beta} = \cos bM\beta = \cos EC = \sin AC = \sin A'C;$$

Digitized by Google

$\frac{c\gamma}{M\gamma} = \sin c\,M\gamma = \sin DB = \cos AB = -\cos A'B$;

$\frac{Mc}{M\gamma} = \cos c\,M\gamma = \cos DB = \sin AB = \sin A'B$.

Dieſe Werthe in (D) eingeſetzt geben:

1) für das Dreieck ABC

$\cos AC . \cos AB + \sin AC . \sin AB . \cos A - \cos BC = o$; (E)

2) für das Dreieck A'BC

$\cos A'C . \cos A'B + \sin A'C . \sin A'B . \cos A' - \cos BC = o$;

dieſelbe Gleichung wie in (E).

2) Um die Gültigkeit der Gleichung (E) auch für den Fall, wenn die Winkelpunkte B, C auf entgegengeſetzten Seiten der Ebene DME liegen, d. h. wenn die Seiten AB, AC ungleichartig ſind, zu erweiſen, konſtruire man wieder $c\gamma \| AA'$; $cm \| MB$; $m\beta \| ME$ und $b\beta \| AA'$, wodurch wieder $c\gamma \# b\beta$ wird. Zieht man noch cb und $\gamma\beta$, die in einer Ebene liegen und ſich in d ſchneiden, ſo geben die Dreiecke cMb, $\gamma M\beta$ wie vorher:

$cb^2 = Mb^2 + Mc^2 - 2Mb . Mc . \cos cMb$; (A)

$\gamma\beta^2 = M\beta^2 + M\gamma^2 - 2M\beta . M\gamma . \cos\gamma M\beta$; (B).

Die (an c, b rechtwinkligen) Dreiecke $dc\gamma$, $db\beta$ ſind kongruent, weil die Seiten $c\gamma$, $b\beta$ nebſt den anliegenden Winkeln gleich ſind; daher $d\gamma = d\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma$; und $dc = db = \frac{1}{2}bc$. Daher iſt:

$\frac{\beta\gamma^2}{4} = d\gamma^2 = cd^2 + c\gamma^2 = \frac{1}{4}cb^2 + c\gamma^2$; daher

$\beta\gamma^2 = cb^2 + 4c\gamma^2$; und

$\beta\gamma^2 - cb^2 = 4c\gamma^2$.

Zieht man alſo die Gleichung (A) von (B) ab, ſo iſt:

$4c\gamma^2 = (M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) + 2Mb . Mc . \cos cMb$
$- 2M\beta . M\gamma . \cos\gamma M\beta$; (C).

Nun iſt wieder $M\beta^2 - Mb^2 + M\gamma^2 - Mc^2 = b\beta^2 + c\gamma^2 = 2c\gamma^2$. Subſtituirt man dies in (C), ſubtrahirt dann auf beiden Seiten $4c\gamma^2$ und dividirt mit 2, ſo iſt:

$o = -c\gamma^2 + Mb . Mc . \cos cMb - M\beta . M\gamma \cos\gamma M\beta$;

oder $-b\beta \cdot c\gamma + Mb \cdot Mc \cos cMb - M\beta \cdot M\gamma \cos \gamma M\beta = 0$.

Daher $-\frac{b\beta \cdot c\gamma}{M\beta \cdot M\gamma} + \frac{Mb \cdot Mc}{M\beta \cdot M\gamma} \cdot \cos cMb - \cos \gamma M\beta = 0$; (D).

Nun iſt wieder $\frac{b\beta}{M\beta} = \sin bM\beta = \sin EC = -\cos AC$;

$$\frac{c\gamma}{M\gamma} = \sin cM\gamma = \sin DB = \cos AB;$$

$$\frac{Mb}{M\beta} = \cos bM\beta = \cos EC = \sin AC;$$

$$\frac{Mc}{M\gamma} = \cos cM\gamma = \cos DB = \sin AB;$$

und $cMb = A$: $\gamma M\beta = BC$; daher wenn dieſe Ausdrücke in (D) ſubſtituirt werden:

$$\cos AC . \cos AB + \sin AC . \sin AB . \cos A - \cos BC = 0$$

wie oben in (E).

Demnach iſt dieſe Gleichung für jedes ſphäriſche Dreieck gültig. Bezeichnen wir die Seiten BC, AC, AB mit a, b, c, ſo iſt die erſte Hauptgleichung für die Elemente a, b, c, A

$$\cos b . \cos c + \sin b \sin c . \cos A - \cos a = 0$$

oder $$\cos a - \cos b . \cos c - \sin b \sin c . \cos A = 0,$$

die zugleich als Fundamentalgleichung für die übrigen angeſehen werden kann, indem jene aus dieſer ſich ableiten laſſen. Denn da mit ihr zugleich die Gleichungen für a, b, c, B und a, b, c, C, gegeben ſind, (für welche nur a, A mit b, B und mit c, C zu vertauſchen iſt) ſo laſſen ſich aus den drei Gleichungen:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c . \cos A = 0$$
$$\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c . \cos B = 0$$
$$\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b . \cos C = 0$$

zwei Stücke des Dreieckes eliminiren und für jede Quaternion der Elemente a, b, c, A, B, C eine Gleichung herleiten.

Zuſatz. Die Gleichung:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c . \cos A = 0$$

iſt in Bezug auf a und A — Stücke, die einander gegenüber liegen — beſtimmt; denn ſie giebt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c;$$

alſo ſowohl A durch a, b, c; als a durch A, b, c unzweideutig beſtimmt; wie denn auch ſowohl durch drei Seiten, als durch zwei Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel das Dreieck beſtimmt wird. In Bezug auf b und c aber, d. i. in Bezug auf die Seiten, deren gegenüberliegende Winkel nicht in der Gleichung enthalten ſind, läßt ſie Zweideutigkeit zu, in Uebereinſtimmung mit g. S. §. 41.

Denn z. B. für c iſt die Gleichung

$$(\cos A \sin b) \sin c + (\cos b) \cos c = \cos a$$

von der Form $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$,

welche Gleichung, wenn $\gamma \leqq \beta$ iſt, nur *einen* Werth für x zwiſchen o und π; wenn aber $\gamma > \beta$, entweder zwei Werthe oder *keinen* giebt, jenachdem α und γ gleicher oder entgegengeſetzter Qualität ſind. Dies auf die Gleichung

$$(\cos A \sin b) \sin c + (\cos b) \cos c = \cos a$$

angewendet, ergiebt:

1) Wenn $\cos a \leqq \cos b$ iſt, (abgeſehen von der Qualität) ſo hat c nur *einen* Werth; das Dreieck iſt alſo beſtimmt. Iſt aber $\cos a \leqq \cos b$, ſo iſt a dem Quadranten näher oder eben ſo nahe, als b und umgekehrt; alſo durch zwei Seiten a, b und einen Winkel A das Dreieck beſtimmt, wenn a nicht entfernter vom Quadranten iſt, als b. (g. S. §. 29.)

2) Wenn $\cos a > \cos b$, alſo a entfernter vom Quadranten iſt, als b, ſo hat c entweder *zwei* Werthe, oder *keinen*; alſo iſt das Dreieck entweder *zweideutig* oder unmöglich und zwar zweideutig, wenn $\cos a$ und $\cos A . \sin b$ gleiche Qualität haben, oder — da $\sin b$ ſtets poſitiv iſt — *wenn a und A ſimilar ſind*; unmöglich, *wenn a und A diſſimilar ſind*.

Hieraus ergiebt ſich alſo ganz einfach die Theorie der Ambiguität und Similarität. Denn iſt — vorausgeſetzt, daß $\cos a > \cos b$, alſo a von dem Quadranten entfernter als b iſt — das Dreieck unmöglich, ſobald A und a diſſimilar ſind; ſo folgt, daß in jedem Dreiecke die von dem Quadranten entferntere Seite gleichartig mit dem gegenüber liegenden Winkel ſein muß.

Da der dem Quadranten nähere Bogen den größeren Sinus hat, ſo läßt ſich das Geſetz der Zweideutigkeit bei ſphäriſchen Dreiecken ganz analog dem bei ebnen Dreiecken ausdrücken. Nämlich, iſt a, b, A gegeben, ſo findet nur Zweideutigkeit ſtatt:

1) bei ebnen Dreiecken wenn $a < b$ iſt;
2) bei ſphäriſchen .... wenn $\sin a < \sin b$ iſt.

§. 13.

Aufgabe. Eine Gleichung zwiſchen zwei Seiten und den gegenüber liegenden Winkeln aufzuſtellen.

Auflöſung. Eine Gleichung für die Seiten a, b und die Winkel A, B wird das Reſultat der Elimination der Seite c aus den Gleichungen:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = o \quad (\mathfrak{A})$$
$$\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B = o \quad (\mathfrak{B})$$

ſein, in welchen die Elemente a, b, c, A, B enthalten ſind. Dieſe Elimination läßt ſich indirekt folgendermaßen bewerkſtelligen. Die Gleichung ($\mathfrak{A}$) giebt:

$$(\cos a - \cos b \cos c) = \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A.$$

Erhebt man, um $\sin c$ durch $\cos c$ auszudrücken, beide Theile auf das Quadrat, ſubſtituirt dann $1 - \cos^2 c$ für $\sin^2 c$ und bringt die Gleichung auf Null, ſo erhält man:

$$(\cos^2 b + \cos^2 A \sin^2 b) \cos^2 c - 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c$$
$$+ \cos^2 a - \cos^2 A \sin^2 b = o,$$

oder, wenn in der Parentheſe $\cos^2 b$, $\cos^2 A$ durch $1 - \sin^2 b$; $1 - \sin^2 A$ ausgedrückt wird:

$$(1-\sin^2 b\sin^2 A)\cos^2 c-2\cos a\,.\cos b\,.\cos c$$
$$+\cos^2 a-\cos^2 A\sin^2 b=o,$$

endlich die Gleichung mit $(1-\sin^2 b\sin^2 A)$ dividirt:

$$\cos^2 c-\frac{2\cos a\,.\cos b}{1-\sin^2 b\sin^2 A}.\cos c+\frac{\cos^2 a-\cos^2 A\sin^2 b}{1-\sin^2 b\sin^2 A}=o;\ (\mathfrak{C}).$$

Verwechſelt man hier a, A mit b, B, ſo erhält man das Reſultat der Gleichung ($\mathfrak{B}$) nach denſelben Operationen, nämlich:

$$\cos^2 c-\frac{2\cos a\,.\cos b}{1-\sin^2 a\,.\sin^2 B}.\cos c+\frac{\cos^2 b-\cos^2 B\sin^2 a}{1-\sin^2 a\,.\sin^2 B}=o;\ (\mathfrak{D}).$$

Da die Gleichungen ($\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{D}$) dieſelben Wurzeln ($\cos c$) haben müſſen *), ſo ſind ſie identiſch, daher die Koeffizienten in beiden gleich. Aus der Gleichung:

$$\frac{2\cos a\ \cos b}{1-\sin^2 b\sin^2 A}=\frac{2\cos a\ \cos b}{1-\sin^2 a\sin^2 B}$$

folgt nun $\sin^2 b\sin^2 A=\sin^2 a\ \sin^2 B$;

---

*) Daß die Gleichungen ($\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{D}$) in jedem Falle einerlei Wurzeln enthalten müſſen, zeigt folgende Betrachtung. Man bemerke zunächſt, daß die Winkel A und B in beiden Gleichungen nur durch die Quadrate ihrer Sinus und Koſinus Einfluß haben auf die Werthe von $\cos c$. Drückt man $\cos^2 A$, $\cos^2 B$ durch $\sin^2 A$, $\sin^2 B$ aus, ſo hängt $\cos c$ in der Gleichung ($\mathfrak{C}$) ab von $\cos a$, $\cos b$, $\sin A$; in ($\mathfrak{D}$) von $\cos a$, $\cos b$, $\sin B$. Da zu jedem Sinus ein ſpitzer und ein ſtumpfer Winkel gehört, ſo erleidet $\cos c$ keine Veränderung, wenn A oder B einmal $<\frac{1}{2}\pi$; dann $>\frac{1}{2}\pi$ genommen wird. — Iſt nun $\sin b<\sin a$, ſo iſt in ($\mathfrak{D}$), wo die beſtimmenden Stücke a, b, B ſind, das Dreieck zweideutig. Die beiden, den Stücken a, b, B genügenden, Dreiecke ſeien (Fig. 3.) BCA, BCA′, indem BC = a; CA = CA′ = b und Winkel CBA = B iſt. Der Winkel A erhält die Werthe CAB und CA′B, die zu einander Supplemente ſind, alſo gleiche Sinus haben. Die Seite c erhält die Werthe BA, BA′, die keine andern, als die durch die Wurzeln der Gleichung ($\mathfrak{D}$) beſtimmten ſein können. Die Gleichung ($\mathfrak{C}$) enthält nun die beſtimmenden Stücke a, b, A, von denen A zwar nicht in ſeinem Sinus doch an ſich zweideutig iſt. Aus dieſen Stücken aber ergiebt die Konſtruktion dieſelben Dreiecke BCA und BCA′, wenn man A für das eine Dreieck ſpitz, für das andere ſtumpf nimmt. Es erhält alſo c dieſelben Werthe in ($\mathfrak{C}$), wie in ($\mathfrak{D}$).

Iſt $\sin b>\sin a$ ſo ergiebt ſich daſſelbe Reſultat.

daher $\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B$;
eine Gleichung für a, b, A, B.

Die Vergleichung der abſoluten Glieder in (C) und (D) ergiebt daſſelbe Reſultat.

Verwechſelt man in dieſer zweiten Hauptgleichung b, B mit c, C, ſo erhält man für a, c, A, C:

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A,$$

eben ſo für b, c, B, C die Gleichung:

$$\sin b \cdot \sin C = \sin a \cdot \sin B.$$

Alle drei Gleichungen laſſen ſich ſo zuſammenfaſſen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

in Worten: die Sinus der Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes verhalten ſich, wie die Sinus der gegenüber liegenden Seiten.

Die Analogie dieſes ſehr einfachen Geſetzes mit dem der ebenen Trigonometrie:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

iſt in die Augen fallend.

Zuſ. 1. Da die Gleichung $\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$ oder $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ lauter Sinus enthält, ſo iſt ſie zweideutig, welche Ternion aus den Elementen a, b, A, B auch gegeben ſein mag; wiewohl das Dreieck ſelbſt beſtimmt ſein kann. Nach dem §. 12. Zuſ. ausgeſprochenen Geſetze der Zweideutigkeit läßt ſich indeß aus dem Sinus leicht erkennen, ob das Dreieck wirklich zweideutig iſt, oder nicht.

Zuſ. 2. Da die Sinus der Winkel ſich wie die der gegenüberliegenden Seiten verhalten, ſo ſteht derjenigen Seite, welche den größten Sinus hat, auch der mit dem größten Sinus behaftete Winkel gegenüber, oder: der dem Quadranten nächſten Seite ſteht der dem Rechten nächſte Winkel gegenüber. Hieraus ergiebt ſich auch in Rückſicht der Similarität der ſphäriſchen Dreiecke eine nicht unintereſſante Analogie derſelben mit den

ebnen Dreiecken. Wie nämlich in ebnen Dreiecken nur derjenige Winkel, welcher der größten Seite gegenüberſtehend den größten Sinus hat, im Allgemeinen ſowohl ſpitz als ſtumpf ſein kann, während die übrigen Winkel immer ſpitz ſind; ſo kann in ſphäriſchen Dreiecken nur derjenige Winkel, welcher dem Rechten am nächſten iſt, dem alſo die Seite mit dem größten Sinus gegenüberſteht, und der ſelbſt unter den Winkeln den größten Sinus hat, ſowohl ſpitz als ſtumpf, d. i. ſowohl gleichartig als ungleichartig mit der gegenüber liegenden Seite ſeyn, während die anderen Winkel immer mit den gegenüberliegenden Seiten gleichartig ſein müſſen. In beiderlei Dreiecken iſt es alſo nur der mit dem größten Sinus behaftete (oder dem Rechten nächſte) Winkel, der ſowohl ſpitz als ſtumpf, alſo in ſphäriſchen Dreiecken ſowohl gleichartig als ungleichartig mit der gegenüberliegenden Seite ſein kann.

§. 14.

Aufgabe. Eine Gleichung für zwei Seiten und zwei Winkel, unter denen der von jenen eingeſchloſſene iſt, zu finden.

Auflöſung. Es ſeien die Seiten a, b und die Winkel A, C, für welche eine Gleichung geſucht werden ſoll. Nimmt man die Gleichungen des §. 12.:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b . \sin c . \cos A = o \quad (\mathfrak{A})$$
$$\cos c - \cos a \cos b - \sin a . \sin b . \cos C = o \quad (\mathfrak{B})$$

in welchen die Elemente a, b, c, A, C enthalten ſind, ſo wird c zu eliminiren ſeyn, um die geforderte Gleichung zu erhalten. Zu dem Ende ſubſtituire man in ($\mathfrak{A}$) für cos c den aus ($\mathfrak{B}$) ſich ergebenden Werth $\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, ſo wie für sin c den aus $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$ folgenden Ausdruck $\frac{\sin a . \sin C}{\sin A}$; dies giebt:

$$\cos a - \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) - \frac{\sin a . \sin b . \cos A \sin C}{\sin A} = o.$$

Löſt man die Parentheſe auf und ſetzt für $\cos^2 b$, $\frac{\cos A}{\sin A}$ reſp. $1 - \sin^2 b$, $\operatorname{cotg} A$, ſo ergiebt ſich:

$$\cos a \sin^2 b - \sin a \sin b \cos b \cos C - \sin a \sin b \operatorname{cotg} A \sin C = o$$

und wenn Alles mit $\sin a \sin b$ dividirt wird:

$$\operatorname{cotg} a . \sin b - \cos b \cos C - \operatorname{cotg} A \sin C = o,$$

die dritte Hauptgleichung für a, b, A, C.

Zu dieſer Gleichung gehören ſechs Quaternionen der Elemente a, b, c, A, B, C.

Zuſatz. Die Gleichung:

$$\operatorname{cotg} a . \sin b - \cos b \cos C - \operatorname{cotg} A \sin C = o,$$

iſt wieder für a und A — zwei einander gegenüberliegende Stücke des Dreieckes — beſtimmt; für b und C aber, die einander nicht gegenüberſtehen, läßt ſie Zweideutigkeit zu; denn für beide iſt ſie von der Form $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$. z. B. für b hat man:

$$(\operatorname{cotg} a) \sin b - (\cos C) \cos b = \operatorname{cotg} A \sin C.$$

Bedingung der Unzweideutigkeit iſt, daß $\operatorname{cotg} A \sin C \leqq \cos C$;

oder, wenn man mit $\sin C$ dividirt, daß $\operatorname{cotg} A \leqq \operatorname{cotg} C$, alſo, daß A dem Rechten näher, oder eben ſo nahe, als C ſei. Zweideutigkeit findet ſtatt, wenn $\operatorname{cotg} A \sin C > \cos C$, d. i. wenn A entfernter vom Rechten iſt, als C. Im letztern Falle wird durch die Möglichkeit des Dreieckes wieder die Similarität von A und a bedingt. Dieſe Gleichung ſpricht alſo das Geſetz der Zweideutigkeit und der Similarität eben ſo aus, wie die erſte Hauptgleichung §. 12.

Anmerkung. Dieſe dritte Hauptgleichung ſcheint nicht ſo einfach für das Gedächtniß zu ſein, als die vorhergehenden, da dreierlei Funktionen, Sinus, Koſinus und Kotangente in derſelben vorkommen. Es kommt indeß nur darauf an, daß man die beſtimmten Stücke (a, A) von den zweideutigen (b, C) unterſcheide, was

nach den Sätzen von der Gleichheit und Zweideutigkeit der ſphäriſchen Dreiecke leicht iſt. Beſtimmt ſind hier immer die einander gegenüberliegenden Stücke (vergl. §. 12. Zuſ.), zweideutig die andern beiden. Demnächſt bemerke man 1) daß von jedem beſtimmten Stücke nur die Kotangente, von jedem zweideutigen aber der Sinus und Koſinus vorkommt; 2) daß jede Kotangente ſich mit einem Sinus zu einem zweigliedrigen Produkte verbindet und zwar mit dem Sinus des gleichartigen Stückes (Seite mit Seite, Winkel mit Winkel); das dritte zweigliedrige Produkt bilden die noch übrigen Koſinus. 3) Um die Gleichung auf Null zu bringen, ſetze man die Produkte, welche Winkel enthalten, negativ. — Hiernach laſſen ſich für die ſechs Quaternionen:

a	b	A	C
a	b	B	C
a	c	A	B
a	c	B	C
b	c	A	B
b	c	A	C

die zugehörigen Gleichungen ſicher und leicht finden. — Legendre giebt für dieſelbe Gleichung folgende mnemoniſche Regel: 1) „Aus „einer Seite a und dem gegenüberliegenden Winkel A; aus einer „andern Seite b und dem anliegenden Winkel C; bilde man die „fiktive Gleichung $\cot g\, a \cot g\, A = \cot g\, b \cot g\, C$, wobei die kleinen „Buchſtaben vor die großen zu ſetzen ſind." 2) „Auf beiden Sei„ten multiplizire man mit $\sin b \,.\, \sin C$, ſo hat man:

$$\text{"}\cot g\, a \,.\, \sin b \,.\, \cot g\, A \,.\, \sin C = \cos b \,.\, \cos C.\text{"}$$

3) „In dem erſten Theile ſondere man die kleinen Buchſtaben von „den großen, indem man vor die letztern das Zeichen — ſetzt; ſo „hat man die wahre Gleichung." — Die oben angegebnen Merkmale möchten indeß für das Gedächtniß und für den Gebrauch bequemer ſein.

§. 15.

Aufgabe. Eine Gleichung für die drei Winkel und eine Seite des ſphäriſchen Dreieckes zu finden.

Auflöſung. Um für A, B, C, a eine Gleichung zu erhalten, braucht man nur die Gleichung für a, b, c, A

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = o$$

auf das Polardreieck anzuwenden; ſo erhält man, indem a, b, c, A reſp. gegen $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{a}$ vertauſcht werden,

$$\cos \overline{A} - \cos \overline{B} \cdot \cos \overline{C} - \sin \overline{B} \cdot \sin \overline{C} \cdot \cos \overline{a} = o;$$

mithin, da $\cos \overline{\alpha} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ und $\sin \overline{\alpha} = \sin \alpha$ iſt,

$$-\cos A - \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a = o,$$

oder $$\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a = o,$$

welches die verlangte Gleichung iſt.

Ohne Hülfe des Polardreieckes würde die Gleichung ſich ergeben, wenn man aus den Gleichungen für a, b, A, C und a, b, B, C die Seite b eliminirt. Für a, b, A, C iſt die Gleichung:

$$\cot g\, a \cdot \sin b - \cot g\, A \sin C - \cos C \cdot \cos b = o; \text{ (§. 14.)}$$

oder .... $$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} - \frac{\cos A \sin C}{\sin A} - \cos C \cdot \cos b = o.$$

Für $\frac{\sin b}{\sin a}$ geſetzt $\frac{\sin B}{\sin A}$ (§. 13.) und Alles mit $\sin A$ multiplizirt giebt:

$$\cos a \sin B - \cos A \sin C - \sin A \cos C \cos b = o; \text{ (A)}$$

Verwechſelt man hier a, A mit b, B, ſo erhält man das Reſultat der Gleichung für a, b, B, C nach ähnlichen Operationen, nämlich:

$$\cos b \sin A - \cos B \sin C - \sin B \cos C \cos a = o; \text{ (B)}.$$

Um $\cos b$ aus (A) und (B) zu eliminiren, multiplizire man (B) mit $\cos C$ und addire (B) und (A); ſo iſt:

$$\cos a \sin B - \cos A \sin C - \cos B \sin C \cos C$$
$$- \cos^2 C \cdot \cos a \cdot \sin B = o;$$

oder das erſte und letzte Glied zuſammengezogen und mit $\sin C$ dividirt:

$$\cos a \sin B \sin C - \cos A - \cos B \cos C = o,$$

oder $$\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cdot \cos a = o.$$

Zuſ. Für A und a iſt die Gleichung beſtimmt; denn man erhält:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C};$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

Für B und C läßt ſie Zweideutigkeit zu, deren Geſetz nebſt dem der Similarität ſich wie §. 12. Zuſ. findet.

Zur Ueberſicht ſtellen wir ſämmtliche Gleichungen für die 15 Quaternionen von a, b, c, A, B, C hier zuſammen.

I.

1) für a, b, c, A ..... $\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = o$;

2) — a, b, c, B ..... $\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B = o$;

3) — a, b, c, C ..... $\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C = o$;

II.

4) — a, b, A, B ..... $\sin a \sin B - \sin b \sin A$; oder $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ oder $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$;

5) — a, c, A, C ..... $\sin a \sin C = \sin c \sin A$;

6) — b, c, B, C ..... $\sin b \sin C = \sin c \sin B$;

III.

7) — a, b, A, C ..... $\operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C - \cos b \cos C = o$;

8) — a, b, B, C ..... $\operatorname{cotg} b \sin a - \operatorname{cotg} B \sin C - \cos a \cos C = o$;

9) — a, c, A, B ..... $\operatorname{cotg} a \sin c - \operatorname{cotg} A \sin B - \cos c \cos B = o$;

10) — a, c, B, C ..... $\operatorname{cotg} c \sin a - \operatorname{cotg} C \sin B - \cos a \cos B = o$;

11) — b, c, A, B ..... $\operatorname{cotg} b \sin c - \operatorname{cotg} B \sin A - \cos c \cos A = o$;

12) — b, c, A, C ..... $\operatorname{cotg} c \sin b - \operatorname{cotg} C \sin A - \cos b \cos A = o$;

IV.

13) — a, A, B, C ..... $\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = o$;

14) — b, A, B, C ..... $\cos B + \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b = o$;

15) — c, A, B, C ..... $\cos C + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = o$;

§. 16.

Formeln für rechtwinklige Dreiecke.

Aus den entwickelten vier Hauptgleichungen ergeben ſich für rechtwinklige Dreiecke ſehr einfache Formeln, die ihres häufigen Gebrauchs wegen hier beſonders aufzuſtellen und zu merken ſind. Da in dem rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel immer gegeben iſt, ſo bedarf es zur Beſtimmung des Dreieckes nur noch zweier Stücke; mithin zur Auflöſung ſolcher Dreiecke Gleichungen, welche mit dem Geſuchten nur drei Stücke enthalten, da der rechte Winkel ſeiner goniometriſchen Funktionen wegen wegfällt. Die Zahl der aufzulöſenden Fälle, mithin auch der zur Auflöſung nöthigen Gleichungen iſt der Zahl der aus den Elementen a, b, c, A, B, C, unter denen C der rechte Winkel ſei, möglichen Quaternionen, welche C enthalten, gleich; alſo $=10$. Dieſe Verbindungen ſind folgende:

a b c C	a c A C	a A B C
a b A C	a c B C	b A B C
a b B C	b c A C	c A B C
	b c B C.	

Die Vertauſchung der Seiten, ſo wie der Winkel, beſchränkt ſich hier, da C unveränderlich iſt, auf die Katheten a, b und deren gegenüberliegende Winkel A, B. Daher bleiben von obigen 10 Verbindungen 6 übrig, als weſentlich verſchieden; nämlich:

1) abcC; 2) abAC; 3) acAC; 4) bcAC;
5) aABC; 6) cABC;

unter denen aus der 2ten, 3ten, 4ten und 5ten durch Vertauſchung der Katheten die übrigen 4 erhalten werden.

Für dieſe ſechs Verbindungen haben wir nun die allgemeinen Gleichungen:

1) $\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin C = o$;
2) $\cotg a \sin b - \cotg A \sin C - \cos b \cos C = o$;
3) $\sin A \sin c = \sin a \sin C$;
4) $\cotg c \sin b - \cotg C \sin A - \cos b \cos A = o$;

5) $\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = o$;

6) $\cos C + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = o$.

Iſt nun C der rechte Winkel, ſo wird $\cos C = o$; $\cotg C = o$; $\sin C = 1$; daher ergeben ſich für das rechtwinklige Dreieck die einfachen Gleichungen:

1) $\cos c - \cos a \cos b = o$; oder ..... $\cos c = \cos a \cos b$; I.

2) $\cotg a \sin b - \cotg A = o$; oder ..... $\tang A = \frac{\tang a}{\sin b}$; II.

3) $\sin A \sin c = \sin a$; oder ..... $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; III.

4) $\cotg c \sin b - \cos b \cos A = o$;

oder ..... $\cos A = \frac{\tang b}{\tang c}$; IV.

5) $\cos A - \sin B \cos a = o$: oder ..... $\cos A = \sin B \cos a$; V.

6) $\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = o$;

oder ..... $\tang A \tang B \cos c = 1$; VI.

Zuſ. 1. 1) Aus $\cos c = \cos a \cos b$ (I.) folgt: Jenachdem zwei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes gleichartig oder ungleichartig ſind, iſt die dritte $< \frac{1}{2}\pi$ oder $> \frac{1}{2}\pi$.

2) Aus $\tang A = \frac{\tang a}{\sin b}$ (II.), ſo wie aus $\cos A = \sin B \cos a$ (V.) folgt, daß jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig iſt.

3) Aus $\cos A = \frac{\tang b}{\tang c}$ folgt:

a) Jenachdem eine Kathete mit der Hypotenuſe gleichartig oder ungleichartig iſt, iſt der eingeſchloſſene Winkel ſpitz oder ſtumpf;

b) Iſt die Hypotenuſe mit einem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, ſo iſt die an demſelben Winkel liegende Kathete im erſten Falle $< \frac{1}{2}\pi$, im andern $> \frac{1}{2}\pi$;

c) Iſt eine Kathete mit dem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, ſo iſt die Hypotenuſe $< \frac{1}{2}\pi$, oder $> \frac{1}{2}\pi$. Dieſe Sätze laſſen ſich übrigens aus 1. und 2. herleiten.

4) Aus tang A tang B . cos c = 1 folgt:

a) Die Hypotenuſe iſt $<\frac{1}{2}\pi$ oder $>\frac{1}{2}\pi$, jenachdem die anliegenden Winkel gleich- oder ungleichartig ſind;

b) Iſt die Hypotenuſe mit einem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, ſo iſt der andere anliegende Winkel ſpitz oder ſtumpf.

Die in 1, 3 und 4 ausgeſprochenen Sätze über die Similarität im rechtwinkligen Dreiecke laſſen ſich in einen Satz zuſammenfaſſen. Verſteht man nämlich unter einer Folge zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, ſo wie eine Seite mit den anliegenden Winkeln; unter Wechſel aber die drei Seiten eines Dreiecks, ſo wie die drei Winkel, ſo kann das Geſetz der Similarität im rechtwinkligen Dreiecke ſo ausgeſprochen werden:

Jenachdem zwei Stücke einer Folge oder eines Wechſels, wozu der rechte Winkel nicht gehört, gleichartig oder ungleichartig ſind, iſt das dritte $<\frac{1}{2}\pi$, oder $>\frac{1}{2}\pi$.

Zuſ. 2. Die Gleichung II. iſt für b; die Gleichung III. für c und die Gleichung V. für B zweideutig, wie das Dreieck ſelbſt, wenn eine Kathete (a) und der gegenüberliegende Winkel (A) gegeben iſt, immer zweideutig iſt. (g. S. §. 38 und 41.)

Zuſ. 3. Bei Vergleichung der Formeln (I.)—(VI.) bemerkt man, daß in drei derſelben ſich zwei Tangenten finden, nämlich in II, IV, und VI; in den übrigen I, III, V aber nur Sinus, oder Koſinus. Eine völlige Uebereinſtimmung in jeder dieſer beiden Abtheilungen läßt ſich erreichen, wenn man für den Sinus oder Koſinus eines Bogens oder Winkels den Koſinus oder Sinus des Komplementes einführt; wodurch ſich auch jede Tangente in eine Kotangente verwandeln läßt. Nehmen wir die Gleichungen I, III, V unter der Form:

$$\cos c = \cos a \cos b \text{ (I.)}; \quad \sin a = \sin A \sin c \text{ (III.)};$$
$$\cos A = \sin B \cos a \text{ (V.)};$$

ſo ergiebt ſich eine genaue Uebereinſtimmung derſelben, wenn ſie ſo geſchrieben werden:

I. $\cos c = \sin a' \sin b'$; III. $\cos a' = \sin A \sin c$;
V. $\cos A = \sin B \sin a'$;

wo a′, b′ die Komplemente der Katheten a, b bedeuten. Die Einführung von Komplementen betrifft dabei nur und jedesmal die Katheten. Merkwürdiger Weiſe werden auch die Gleichungen:

$$\sin b = \frac{\tang a}{\tang A} = \tang a . \cotg A \quad (II.);$$

$$\cos A = \frac{\tang b}{\tang c} = \tang b . \cotg c \quad (IV.);$$

$\tang A \tang B \cos c = 1$; oder $\cos c = \cotg A \cotg B$ (VI.); eben dadurch völlig konform, daß für jede Kathete das Komplement derſelben geſetzt wird. Denn man erhält:

II. $\cos b' = \cotg a' \cotg A$; IV. $\cos A = \cotg b' \cotg c$;
VI. $\cos c = \cotg A \cotg B$.

So reduziren ſich jene ſechs Gleichungen auf zwei Formen, indem in jeder der erſte Theil ein Koſinus iſt; der zweite Theil iſt für I, III, V ein Produkt zweier Sinus; für II, IV, VI ein Produkt zweier Kotangenten. Dieſer merkwürdigen Uebereinſtimmung der Formeln in jeder der beiden Abtheilungen muß eine Uebereinſtimmung in der Lage der zugehörigen Stücke entſprechen. In den Gleichungen IV. und VI. bemerkt man ſogleich, daß das in dem erſten Theile befindliche Stück (A, c) unmittelbar zwiſchen den Stücken (b c; A B) des zweiten Theiles liegt, indem alle drei eine Folge in dem oben (Zuſ. 1.) bezeichneten Sinne bilden; in II. jedoch iſt b durch den rechten Winkel von a getrennt. Da indeß die Funktionen des rechten Winkels in den Formeln nicht gegenwärtig ſind, ſo kann derſelbe hier ganz weggelaſſen und die Katheten a, b als unmittelbar, wie die Stücke einer Folge, zuſammenhängend angeſehen werden. Inſofern nun laſſen ſich die Gleichungen für die Folgen in II, IV, VI in den allgemeinen Ausdruck zuſammenfaſſen:

1) Der Koſinus eines Stückes iſt gleich dem

Produkte aus den Kotangenten der (unmittelbar) an demſelben liegenden Stücke.

In den Gleichungen I, III, V findet dies offenbar nicht ſtatt, wenn auch der rechte Winkel bei Seite geſetzt wird. Vielmehr liegen hier die in dem zweiten Theile jeder Gleichung enthaltenen Stücke unmittelbar an einander (im Gegenſatze von II, IV, VI) und machen den Anfang einer Folge, die jedoch unterbrochen wird durch das im erſten Theile der Gleichung enthaltene Stück, welches von jenen beiden getrennt iſt durch einen zwiſchenliegenden Winkel oder eine anliegende Seite. Hieraus ergiebt ſich aber zugleich der allgemeine Ausdruck der Gleichungen I, III, V.

2) Der Koſinus eines Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Sinus der von demſelben getrennten Stücke.

Da in den Ternionen der Gleichungen I—VI alle mögliche Lagen je dreier Stücke des rechtwinkligen Dreieckes vorkommen, ſo ſind die möglichen Fälle der Auflöſung rechtwinkliger in den Sätzen (1) und (2) enthalten, bei denen nicht zu vergeſſen iſt, daß ſtatt der Katheten immer deren Komplemente zu ſetzen ſind.

Dies ſind die Neperſchen Regeln, von dem Erfinder der Logarithmen mit dieſen zugleich bekannt gemacht. (Mirifici canonis logarithmorum descriptio, Cap. 4.).

Anmerk. 1. Wenn dieſe Regeln ſo vorgetragen werden:

1) Der Koſinus des mittleren Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Kotangenten der anliegenden Stücke;

2) Der Koſinus des mittleren Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Sinus der getrennten Stücke —

ſo iſt der Ausdruck „des mittleren" Stückes in (2) unbeſtimmt, weil in den Gleichungen I, III, V die in dem erſten Theile enthaltenen Stücke c, a, A nicht mittlere der zugehörigen Ternion ſein können, wenn die Stücke des Dreieckes — mit Uebergehung des rechten Winkels — für alle Ternionen nach einer und derſelben Richtung fortgezählt werden; was doch die Brauchbarkeit der

Regeln bedingen würde. Dieſer Beiſatz „mittlere" iſt aber auch überflüſſig, wenn die Regeln wie oben ausgedrückt werden.

Anmerk. 2. Ein anderes Hülfsmittel, die Formeln für das ſphäriſche rechtwinklige Dreieck im Gedächtniß zu behalten, bietet die Analogie derſelben mit denen für das ebne rechtwinklige Dreieck dar. Denn an die Formeln:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \cos A = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tang} A = \frac{a}{b}; \quad \cos A = \sin B$$

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = 1,$$

laſſen ſich die obigen:

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}; \cos A = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}; \operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b};$$

$$\cos A = \sin B . \cos a; \quad \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos c = 1;$$

um ſo leichter knüpfen, als jene im Grunde nur Definitionen der goniometriſchen Funktionen ſind und leicht behalten werden.

Die Analogie der Formel $\cos c = \cos a \cos b$ und der für das ebne rechtwinklige Dreieck $c^2 = a^2 + b^2$ zeigt ſich, wenn man die Koſinus in derſelben durch Sinus oder Tangenten ausdrückt, nach der Formel

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}.$$

Man erhält dann:

$$\sin^2 c = \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b;$$

$$\operatorname{tang}^2 c = \operatorname{tang}^2 a + \operatorname{tang}^2 b + \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b.$$

Auf eine andere Weiſe erhält man zu der Formel

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

die analoge: $\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c + b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c - b)$.

Denn es iſt $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$; daher $1 - \cos a = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b}$ und

$1 + \cos a = \frac{\cos b + \cos c}{\cos b}$; daher $\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b + \cos c}$;

oder $\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c + b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c - b)$.

§. 17.

Da das Quadrantendreieck das Polardreieck eines rechtwinkligen iſt, ſo ſind die Seiten und Winkel des letztern die Supplemente der des Quadrantendreieckes. Daher erhält man aus den für das rechtwinklige Dreieck aufgeſtellten Formeln

folgende für das Quadrantendreieck, in welchem die Seite c als Quadrant vorausgeſetzt wird.

1) $\cos C = -\cos A . \cos B$;

2) $\tang a = \frac{\tang A}{\sin B}$;

3) $\sin a = \frac{\sin A}{\sin C}$;

4) $\cos a = -\frac{\tang B}{\tang C}$;

5) $\cos a = \sin b . \cos A$;

6) $\tang a \tang b . \cos C = -1$.

Von der Vertauſchung der Seiten iſt der Quadrant c ausgeſchloſſen. Die Vertauſchung der Nichtquadranten a, b in den Formeln 2, 3, 4, 5 giebt die übrigen 4 Formeln für die Auflöſung der 10 Fälle, welche auch hier möglich ſind.

Für die Similarität im Quadrantendreiecke erhält man aus §. 16., Zuſ. 1., das Geſetz:

Jenachdem zwei Stücke einer Folge oder eines Wechſels, worin der Quadrant ſich nicht befindet, gleich- oder ungleichartig ſind, iſt das dritte Stück $> \frac{1}{2}\pi$ oder $< \frac{1}{2}\pi$.

Allgemeine Auflöſung der ſphäriſchen Dreiecke.

§. 18.

Die Auflöſung der rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke hat keine Schwierigkeit, da die Formeln für dieſelben ſehr einfach und für die logarithmiſche Berechnung bequem ſind. Indem dieſe daher übergangen wird, ſoll nur noch die Anwendung der vier Hauptgleichungen auf die Auflöſung ſchiefwinkliger Dreiecke rückſichtlich der Zuſammenziehung derſelben in Faktoren mittelſt einzuführender Hülfsgrößen gezeigt werden. Die möglichen Aufgaben bei Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke laſſen ſich nach den Ternionen aus den Seiten und Winkeln, durch welche ein Dreieck beſtimmt wird, auf ſechs Fälle bringen. Es können

nämlich gegeben ſein: 1) drei Seiten; 2) zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel; 3) eine Seite und die anliegenden Winkel; 4) drei Winkel; 5) zwei Seiten und einer der gegenüberliegenden Winkel; 6) zwei Winkel und eine der gegenüberliegenden Seiten. Daraus entſtehen folgende 18 Aufgaben:

	Gegeben iſt		Geſucht wird
1)	a b c	. . . . .	A B C (I) (I) (I)
2)	a b C	. . . . .	A B c (III) (III) (I)
3)	A B c	. . . . .	a b C (III) (III) (IV)
4)	A B C	. . . . .	a b c (IV) (IV) (IV)
5)	a b A	. . . . .	B C c (II) (III) (I)
6)	A B a	. . . . .	b c C (II) (III) (IV)

wo durch I, II, III, IV die Hauptgleichungen angedeutet ſind, durch welche das Geſuchte gefunden wird.

Erſter Fall.

Gegeben: a, b, c.

Der Winkel A wird durch die Formel gefunden:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Der Logarithmen wegen ſetze man:

$$\cos b = n \sin \varphi; \quad \cos a = n \cos \varphi \sin c;$$

ſo iſt $\tan g\,\varphi = \frac{\cos b \sin c}{\cos a}$; $n = \frac{\cos b}{\sin \varphi}$; und

$$\cos A = \frac{n(\sin c \,.\, \cos \varphi - \sin \varphi \,.\, \cos c)}{\sin b \ \sin c} = \frac{n \sin(c - \varphi)}{\sin b \ \sin c}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} b \sin(c - \varphi)}{\sin c \,.\, \sin \varphi}.$$

Für φ kann ſogleich der kleinſte Werth φ' genommen werden. Denn da im Allgemeinen $\varphi = r\pi + \varphi'$ iſt, ſo iſt:

$$\sin(c - \varphi) = \sin(c - \varphi' - r\pi) = \sin(c - \varphi') \cos r\pi;$$

und $\sin \varphi = \sin(\varphi' + r\pi) = \sin \varphi' . \cos r\pi$; alſo:

$\frac{\sin(c-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin(c-\varphi')}{\sin\varphi'}$. Auf dieſelbe Weiſe findet man B und C. Vortheilhafter als dieſe Auflöſung, bei welcher man für einen Winkel ſechsmal, für alle drei Winkel zwölfmal aufſchlagen muß, — ſind die §. 28. für $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}A$ entwickelten Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\ \sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\ \sin c}};$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}};$$

von denen die letzte mit ſiebenmaligen Aufſchlagen alle drei Winkel giebt.

§. 19.

Zweiter Fall.

Gegeben: a, b, C.

1) Für A erhält man aus der Gleichung

$$\text{cotg}\,a\sin b - \text{cotg}\,A\sin C - \cos b\cos C = o$$

die Formel

$$\text{cotg}\,A = \frac{\text{cotg}\,a\sin b - \cos C\cos b}{\sin C}.$$

Setzt man hier $\text{cotg}\,a = n\cos\varphi$; $\cos C = n\sin\varphi$; ſo iſt:

$$\text{tang}\,\varphi = \cos C.\text{tang}\,a;\quad n = \frac{\cos C}{\sin\varphi};\ \text{und}$$

$$\text{cotg}\,A = \frac{n\sin(b-\varphi)}{\sin C} = \frac{\text{cotg}\,C\sin(b-\varphi)}{\sin\varphi};$$

oder $\text{tang}\,A = \frac{\text{tang}\,C.\sin\varphi}{\sin(b-\varphi)}$; wo wieder der kleinſte Werth von φ genommen werden kann.

2) Für B erhält man auf dieſelbe Weiſe

$$\text{tang}\,B = \frac{\text{tang}\,C\sin\psi}{\sin(a-\psi)},\quad \text{indem}\quad \text{tang}\,\psi = \cos C\,\text{tang}\,b.$$

3) Die dritte Seite c wird aus der Gleichung

$$\cos c = \cos C\sin a\sin b + \cos a\cos b$$

gefunden. Man ſetze $\cos C \sin a = n \cos\varphi$; $\cos a = n \sin\varphi$; ſo iſt $\tan g\varphi = \frac{\cot g\, a}{\cos C}$; $n = \frac{\cos a}{\sin\varphi}$; und

$$\cos c = n \sin(b + \varphi) = \frac{\cos a \,.\, \sin(b + \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Durch die Formeln von Neper (§. 33.) ſo wie durch die Gauß'ſchen (§. 32.) erhält man auch für dieſen Fall eine bequemere Auflöſung.

§. 20.
Dritter Fall.

Gegeben: A, B, c.

1) Um a zu finden, erhält man aus

$$\cot g\, a \sin c - \cot g\, A \,.\, \sin B - \cos B \,.\, \cos c = 0$$

die Formel $\cot g\, a = \frac{\cot g\, A \sin B + \cos c \cos B}{\sin c}$,

in der man $\cot g\, A = n \cos\varphi$; $\cos c = n \sin\varphi$ ſetzen kann.

Dann iſt $\tan g\varphi = \tan g\, A \,.\, \cos c$; $n = \frac{\cos c}{\sin\varphi}$

und $\cot g\, a = \frac{n \sin(B + \varphi)}{\sin c} = \frac{\cot g\, c \,.\, \sin(B + \varphi)}{\sin\varphi}$,

oder $\tan g\, a = \frac{\tan g\, c \,.\, \sin\varphi}{\sin(B + \varphi)}$, wo der kleinſte Werth von φ genommen werden kann.

2) Für b erhält man hieraus durch Verwechſelung

$$\tan g\, b = \frac{\tan g\, c \,.\, \sin\psi}{\sin(A + \psi)}, \text{ wo } \tan g\psi = \tan g\, B \cos c.$$

3) Für C hat man

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B.$$

Setzt man $\cos c \sin A = n \cos\varphi$; $\cos A = n \sin\varphi$; ſo erhält man

$$\cos C = \frac{\cos A \,.\, \sin(B - \varphi)}{\sin\varphi}, \text{ wo } \tan g\varphi = \frac{\cot g\, A}{\cos c}.$$

Die Neperſchen und die Gauß'ſchen Formeln ſind hier eben ſo vortheilhaft, als im vorigen Falle.

§. 21.

Vierter Fall.

Gegeben: A, B, C.

Für die Seite a hat man die Formel

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Setzt man $\cos A = n \cos\varphi \sin C$; $\cos B = n \sin\varphi$; ſo ergiebt ſich $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos B \sin C}{\cos A}$; $n = \frac{\cos B}{\sin\varphi}$ und

$$\cos a = \frac{n \sin(C+\varphi)}{\sin B \sin C} = \frac{\operatorname{cotg} B \sin(C+\varphi)}{\sin C \sin\varphi}.$$

Eben ſo findet man b und c.

Auch hier kann man ſich der §. 29. aufgeſtellten Formeln

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B \ \sin C}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \ \sin C}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}},$$

mit demſelben Vortheile, wie der ähnlichen im erſten Falle, bedienen.

§. 22.

Fünfter Fall.

Gegeben: a, b, A.

Dieſer und der folgende Fall ſind die **zweideutigen Fälle** der ſphäriſchen Trigonometrie, weil den gegebnen Stücken zwei verſchiedene Dreiecke entſprechen können, und zwar in dieſem Falle, wenn $\sin a < \sin b$ iſt.

1) Der Winkel B findet ſich nach dem Sinusgeſetze

$$\sin B = \frac{\sin A . \sin b}{\sin a}.$$

Hier iſt nun nach §. 12. Zuſ.

1) wenn $\sin a \geqq \sin b$ iſt, B simil. b.

2) wenn $\sin a < \sin b$, B zweideutig; ſowohl $< \frac{1}{2}\pi$,
als $> \frac{1}{2}\pi$.

2) Der Winkel C wird durch die Gleichung

$$\operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C - \cos b \cos C = o;$$

oder $\operatorname{cotg} A \sin C + \cos b \cos C = \operatorname{cotg} a . \sin b$, gefunden. Setzt man $\operatorname{cotg} A = n \cos \varphi$; $\cos b = n \sin \varphi$; ſo iſt:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} A}{\sin b}; \; n = \frac{\cos b}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos \varphi}; \text{ und}$$

$$n \sin (C + \varphi) = \operatorname{cotg} a . \sin b, \text{ daher}$$

$$\sin (C + \varphi) = \frac{\operatorname{cotg} a \sin b}{n} = \frac{\operatorname{tang} b \sin \varphi}{\operatorname{tang} a}.$$

Wird $(C+\varphi)$ durch ψ bezeichnet, ſo iſt $C = \psi - \varphi$. Da $C > o$ und $< \pi$ ſeyn muß, ſo iſt nach §. 9. für φ der kleinſte Werth φ', für ψ aber der kleinſte ψ' oder deſſen Supplement $\pi - \psi'$, das für ein negatives ψ' größer, als π wird, zu nehmen. Dieſe Zweideutigkeit des ψ entſcheidet ſich nun nach §. 9. und 12. ſo:

1) Wenn $\sin a \geqq \sin b$;

ſo iſt $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem A $\left\{\begin{matrix}\text{simil.}\\ \text{dissim.}\end{matrix}\right\}$ b.

2) Wenn $\sin a < b$; ſo iſt ψ zweideutig.

Es entſteht noch die Frage, welche Werthe von B und C im zweideutigen Falle zu einem und demſelben Dreiecke gehören. Die Entſcheidung iſt: zu dem **größeren** C gehört das **mit A gleichartige** B.

Denn es ſeien (Fig. 4.) ABC und AB'C die beiden Dreiecke, welche aus a, b, A ſich konſtruiren laſſen, und zwar ſey AC = b; CB = CB' = a; CAB = A. Das von C auf AB gefällte Perpendikel CD fällt dann zwiſchen CB und CB'; daher iſt CBA simil. A (g. S. §. 39.) und CB'A dissimil. A; alſo das größere C, nämlich ACB, zu dem mit A gleichartigen B (CBA) und das kleinere C (ACB') zu dem mit A ungleichartigen B (CB'A) gehörig.

3) Die Seite c findet ſich aus der erſten Hauptgleichung:

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a.$$

Setzt man $\cos A \sin b = n \cos \varphi$; $\cos b = n \sin \varphi$; ſo wird:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos A}; \quad n = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \quad \text{und}$$

$$\sin(c + \varphi) = \frac{\cos a \sin \varphi}{\cos b};$$

daher $c = \psi - \varphi$ wenn $c + \varphi = \psi$ geſetzt wird. Von ψ und φ gilt das in 2. bemerkte. Die Entſcheidung der Zweideutigkeit des ψ iſt hier dieſelbe, wie oben.

1) Iſt $\sin a \geq \sin b$,

ſo iſt $\psi \lessgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem A $\left\{\begin{matrix}\text{simil.}\\ \text{dissimil.}\end{matrix}\right\}$ b iſt.

2) Iſt $\sin a < \sin b$; ſo iſt ψ zweideutig.

Im letztern Falle gehört das größere c zu dem größeren C, alſo zu dem mit A gleichartigen B. Sind alle drei Stücke B, C, c zu berechnen, ſo kann man auch, nachdem B gefunden iſt, für C und c die Neperſchen Formeln anwenden. Doch möchte, beſonders wenn ein zweideutiger Fall vollſtändig aufgelöſt werden ſollte, die hier angegebene Auflöſung kürzer ſeyn, da man für beide Dreiecke nur achtmal aufzuſchlagen braucht.

§. 23.

Sechſter Fall.

Gegeben: A, B, a. Dieſer Fall wird ganz wie der vorhergehende aufgelöſt.

1) Für die Seite b iſt

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A};$$

1) Iſt $\sin A \geq \sin B$; ſo iſt b simil. B.

2) Iſt $\sin A < \sin B$; ſo iſt b zweideutig $\lessgtr \frac{1}{2}\pi$.

2) Für c wird aus der Gleichung

$$\operatorname{cotg} a \sin c - \cos B \cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \sin B,$$

wie im vorigen Falle gefunden

$$c = \psi + \varphi,$$

indem $\tang \varphi = \tang a . \cos B$; $\sin \psi = \frac{\tang B . \sin \varphi}{\tang A}$ iſt.
Man hat hier wieder für φ den kleinſten Werth zu nehmen; für das zweideutige ψ aber iſt die Entſcheidung:

1) Wenn $\sin A \geqq \sin B$;

ſo iſt $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem a $\begin{Bmatrix} \text{dissim.} \\ \text{simil.} \end{Bmatrix}$ B.

2) Wenn $\sin A < \sin B$ iſt, ſo iſt ψ zweideutig.
Im zweideutigen Falle gehört hier das kleinere c und das mit a gleichartige b zu einem Dreiecke; wie ſich durch das Polardreieck aus dem fünften Falle ergiebt.

3) Für C iſt die Gleichung

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A,$$

aus der ſich ergiebt: $C = \psi + \varphi$; indem $\tang \varphi = \frac{\cotg B}{-\cos a}$;

$$\sin \psi = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

1) Iſt $\sin A \geqq \sin B$;

ſo iſt $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$; jenachdem a $\begin{Bmatrix} \text{dissimil.} \\ \text{simil.} \end{Bmatrix}$ B.

2) Iſt $\sin A < \sin B$; ſo kann $\psi < \frac{1}{2}\pi$, und $> \frac{1}{2}\pi$ ſein.

Im zweideutigen Falle gehört das kleinere C zu dem kleineren c und zu dem mit a gleichartigem b.

Gleichungen für fünf und für ſechs Stücke des Dreieckes.

§. 24.

Aus der Verbindung der vier Hauptgleichungen, die nur vier Stücke des Dreieckes enthalten, laſſen ſich für fünf und für alle ſechs Stücke deſſelben ähnliche Gleichungen ableiten, die ſowohl an und für ſich, als für den trigonometriſchen Kalkul überhaupt von Wichtigkeit ſind.

I. Für fünf Stücke.

1) Für drei Seiten und zwei Winkel.

Setzt man in der Gleichung für a b A C

$$\cot g\, a \sin b - \cos b \cos C - \cot g\, A \sin C = o;$$

oder $\frac{\cos a \sin b}{\sin a} - \cos b \cos C - \frac{\cos A \sin C}{\sin A} = o;$ (A)

für $\frac{\sin C}{\sin A}$ den Werth $\frac{\sin c}{\sin a}$ ein und multiplizirt Alles mit sin a, ſo erhält man:

$$\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C - \sin c \cdot \cos A = o; \quad (A.1.)$$

Durch Vertauſchung von a, A mit b, B erhält man

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C - \sin c \,.\, \cos B = o; \quad (A.2.)$$

2) Für drei Winkel und zwei Seiten.

Wird in (A) für $\frac{\sin b}{\sin a}$ eingeſetzt $\frac{\sin B}{\sin A}$ und Alles mit sin A multiplizirt, ſo erhält man:

$$\cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A - \cos A \sin C = o;$$

oder $\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b - \sin B \cos a = o;$ (B.1.)

und durch Verwechſelung von a, A mit c, C

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b - \sin B \cos c = o; \quad (B.2.)$$

Für die möglichen Verbindungen zu fünfen aus den Elementen a, b, c, A, B, C ergeben ſich daher aus (A. 1.) durch Vertauſchungen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C - \sin c \cos A = o; \\
2) & \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C - \sin c \cos B = o; \\
3) & \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B - \sin b \cos A = o; \\
4) & \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B - \sin b \cos C = o; \\
5) & \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A - \sin a \cos B = o; \\
6) & \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A - \sin a \cos C = o;
\end{array}\right\} (A)$$

und aus (B. 1.)

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c - \sin C \cos a = o; \\
2) & \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c - \sin C \cos b = o; \\
3) & \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b - \sin B \cos a = o; \\
4) & \sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b - \sin B \cos c = o; \\
5) & \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a - \sin A \cos b = o; \\
6) & \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a - \sin A \cos c = o;
\end{array}\right\} (B)$$

Daß die zweite Reihe (B) aus der erſten (A) durch das Polardreieck erhalten wird, zeigt ſich auf den erſten Blick.

§. 25.

Für dieſelben fünf Stücke ergiebt ſich ein zweites Doppelpaar von Gleichungen aus der erſten und vierten Hauptgleichung.

1) Für a, b, c, A, B.

Man multiplizire die Gleichung

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a$$

mit . . . . . . $\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a}$,

ſo erhält man:

$$\sin B(\cos A \sin c + \operatorname{cotg} b \cos c) = \sin A \operatorname{cotg} a; \quad (C)$$

2) Für A, B, C, a, b erhält man aus der vorſtehenden eine Gleichung, wenn dieſelbe auf das Polardreieck angewendet wird; nämlich:

$$\sin b(\cos a \sin C - \operatorname{cotg} B \cos C) = \sin a \operatorname{cotg} A; \quad (D)$$

oder man multiplizire die vierte Hauptgleichung

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A$$

mit . . . . $\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}$.

Durch Verwechſelungen erhält man wie oben:

aus (C)

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \sin B(\cos A \sin c + \operatorname{cotg} b \cos c) = \sin A \operatorname{cotg} a;\\
2)\ \sin C(\cos A \sin b + \operatorname{cotg} c \cos b) = \sin A \operatorname{cotg} a;\\
3)\ \sin A(\cos B \sin c + \operatorname{cotg} a \cos c) = \sin B \operatorname{cotg} b;\\
4)\ \sin C(\cos B \sin a + \operatorname{cotg} c \cos a) = \sin B \operatorname{cotg} b;\\
5)\ \sin A(\cos C \sin b + \operatorname{cotg} a \cos b) = \sin C \operatorname{cotg} c;\\
6)\ \sin B(\cos C \sin a + \operatorname{cotg} b \cos a) = \sin C \operatorname{cotg} c;
\end{array}\right\} (C)$$

aus (D)

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \sin b(\cos a \sin C - \operatorname{cotg} B \cos C) = \sin a \operatorname{cotg} A;\\
2)\ \sin c(\cos a \sin B - \operatorname{cotg} C \cos B) = \sin a \operatorname{cotg} A;\\
3)\ \sin a(\cos b \sin C - \operatorname{cotg} A \cos C) = \sin b \operatorname{cotg} B;\\
4)\ \sin c(\cos b \sin A - \operatorname{cotg} C \cos A) = \sin b \operatorname{cotg} B;\\
5)\ \sin a(\cos c \sin B - \operatorname{cotg} A \cos B) = \sin c \operatorname{cotg} C;\\
6)\ \sin b(\cos c \sin A - \operatorname{cotg} B \cos A) = \sin c \operatorname{cotg} C;
\end{array}\right\} (D)$$

Anmerk. Die Gleichungen dieſes §. ſind durch Delambre bekannt geworden, der ſie bei Entwickelung der trigonometriſchen Differenziale anwendet.

§. 26.
II. Für ſechs Stücke.

1) Nimmt man die erſte und die vierte Hauptgleichung

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c;$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C;$$

und multiplizirt die erſte mit $\cos A$, die zweite mit $\cos a$, ſo geben die zweiten Theile die Gleichung

$$\cos^2 A \sin b \sin c + \cos A \cos b \cos c = \cos^2 a \sin B \sin C - \cos a \cos B \cos C;$$

dazu die Gleichung $\sin^2 A \sin b \sin c = \sin^2 a \sin B \sin C$ addirt, welche aus $\sin A \sin b = \sin a \sin B$ und $\sin A \sin c = \sin a \sin C$ folgt, giebt

$$\sin b \sin c + \cos A \cos b \cos c = \sin B \sin C - \cos a \cos B \cos C \quad (E).$$

Wie dieſe Gleichung für b, B und c, C ſymmetriſch iſt, ſo erhält man ſie für b, B und a, A, ſo wie für a, A und c, C durch gehörige Verwechſelungen. Dieſe drei Gleichungen zuſammengeſtellt ſind:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B \\ \qquad\qquad - \cos A \cos B \cos c; \\ 2)\ \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B = \sin A \sin C \\ \qquad\qquad - \cos A \cos C \cos b; \\ 3)\ \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C \\ \qquad\qquad - \cos B \cos C \cos a; \end{array}\right\} (E)$$

Anmerk. Cagnioli hat dieſe ſehr einfache Formel zuerſt bekannt gemacht.

2) Andere Gleichungen zwiſchen ſechs Stücken erhält man aus den Formeln des §. 24.

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C; \quad (A. 1.)$$
$$\sin C \cos b = \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c; \quad (B. 2.)$$

Die Quotienten aus dem erſten Theile der einen und dem zweiten der andern genommen, giebt:

$$\frac{\sin C \cos b}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c}{\sin c \cos A}.$$

Zähler und Nenner im erſten Theile durch cos b, im zweiten durch cos A dividirt, giebt die Gleichung

$$\frac{\sin C}{\operatorname{tang} b \cos a - \cos C \sin a} = \frac{\operatorname{tang} A \cos B + \cos c \sin B}{\sin c}\text{ *)}; \quad (F.1.)$$

durch Verwechſelung von a, A mit b, B erhält man hiezu:

$$\frac{\sin C}{\operatorname{tang} a \cos b - \cos C \sin b} = \frac{\operatorname{tang} B \cos A + \cos c \sin A}{\sin c}; \quad (F.2.)$$

Dieſe Gleichungen ergeben durch Diviſion:

$$\frac{\operatorname{tang} a . \cos b - \cos C \sin b}{\operatorname{tang} b . \cos a - \cos C \sin a} = \frac{\operatorname{tang} A \cos B + \cos c \sin B}{\operatorname{tang} B \cos A + \cos c \sin A}.$$

Dieſelbe Behandlung der Gleichungen

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C; \quad (A.1.)$$

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c; \quad (B.1.)$$

ergiebt:

$$\frac{\sin C}{\sin b - \operatorname{tang} a \cos b \cos C} = \frac{\sin B + \operatorname{tang} A \cos B \cos c}{\sin c}; \quad (G.1.)$$

und

$$\frac{\sin C}{\sin a - \operatorname{tang} b \cos a \cos C} = \frac{\sin A + \operatorname{tang} B \cos A \cos c}{\sin c}; \quad (G.2.)$$

Aus §. 24. (A.1.) und (A.4.) erhält man auf dieſelbe Weiſe:

$$\frac{\cos C}{\cos a - \sin a \operatorname{cotg} b \cos C} = \frac{\sin a \operatorname{cotg} c - \cos a \cos B}{\cos A}; \quad (H.)$$

Aus (A.3.) und (A.6.) folgt:

$$\frac{\cos C}{\operatorname{cotg} a \sin c - \cos B \cos c} = \frac{\cos c - \cos A \operatorname{cotg} b \sin c}{\cos A}; \quad (I.)$$

Aus (B.1.) und (B.6.):

$$\frac{\cos C}{\operatorname{cotg} A \sin B + \cos c \cos B} = \frac{\operatorname{cotg} C \sin B + \cos a \cos B}{\cos a}.$$

Die Verbindungen dieſer Art laſſen ſich noch vermehren und abändern; ſie möchten indeß nur ſelten Anwendung finden.

*) Ebenfalls von Delambre erwähnt in ſeiner Aſtronomie.

§. 27.

3) Setzt man in der Gleichung §. 25. (C. 6.)

$$\sin B \cos C \sin a + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c;$$

für $\sin B \sin a$ das gleiche $\sin A \sin b$, ſo erhält ſie ſechs Stücke, nämlich:

$$\sin A \cos C \sin b + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c; \quad (K. 1.)$$

die Vertauſchung von a, A mit b, B giebt:

$$\sin A \operatorname{cotg} a \sin b + \sin B \cos C \sin a = \sin C \operatorname{cotg} c; \quad (K. 2.)$$

Aus §. 25. (D. 6.) finden ſich durch ähnliche Aenderung die Gleichungen

$$\sin a \cos c \sin B - \sin b \cos A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} C; \quad (L. 1.)$$

$$\sin a \operatorname{cotg} A \cos B - \sin b \cos c \sin A = - \sin c \operatorname{cotg} C; \quad (L. 2.)$$

die übrigens das Polardreieck aus (K. 1.) und (K. 2.) ergiebt.

Formeln für halbe Seiten und Winkel, ſo wie für Summen und Differenzen mehrerer Stücke.

§. 28.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen, welche nur Funktionen ganzer und einzelner Stücke des Dreieckes enthalten, laſſen ſich für Hälften einzelner Stücke und für Summen oder Differenzen zweier und mehrerer Stücke zum Theil ſehr elegante Ausdrücke herleiten, die nicht nur für die Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke vortheilhaft, ſondern auch für die ſphäriſche Geometrie überhaupt ſehr wichtig ſind. Die Entwickelung derſelben beginne mit einer Umformung der erſten Hauptgleichung, die auch hier als einzige Fundamentalgleichung betrachtet werden kann, und zwar mit der Aufgabe:

Aus der Formel $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ andere für $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ herzuleiten.

1) Für $\sin \frac{1}{2} A$. Man ziehe beide Theile der Gleichung $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ von 1 ab, ſo erhält man:

$$1-\cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man $b-c=\psi$; $a=\varphi$; ſo iſt $\cos(b-c)-\cos a = \cos\psi - \cos\varphi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ (§. 2, 46.); daher:

$$1-\cos A = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c};$$

daher:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}; \text{ (§.2,24.)}$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}}; \quad (1.)$$

welche Formel zur Berechnung eines Winkels aus drei Seiten bequem iſt. Das Wurzelzeichen iſt nur poſitiv, da $\sin\frac{1}{2}A$ nicht negativ ſein kann. Der Sinus ſelbſt iſt ohne Zweideutigkeit, da $A<\pi$; $\frac{1}{2}A<\frac{1}{2}\pi$, alſo $\frac{1}{2}A$ der kleinſte zu dem Sinus gehörige Winkel iſt.

Durch Verwechſelung von A, a mit B, b und mit C, c erhält man für B und C:

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+a-c)}{\sin a \sin c}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Man bemerke, daß in den Trinomien $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, jedesmal die den auszudrückenden Winkel einſchließenden Seiten ſubtraktiv ſtehen; die demſelben gegenüberſtehende Seite von der Subtraktion ausgeſchloſſen bleibt.

2) Für $\cos\frac{1}{2}A$.

Wendet man die Formel für $\sin\frac{1}{2}A$ auf das Nebendreieck

$$\left\{\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \bar{a} & \bar{b} & c \\ \bar{A} & \bar{B} & C \end{matrix}\right\}$$ an, ſo iſt:

$$\sin \tfrac{1}{2}\overline{A} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b} - c) \sin \frac{1}{2}(\overline{a} + c - \overline{b})}{\sin \overline{b} \sin c}},$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\pi - A) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(2\pi - a - b - c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin(\pi - b) \sin c}},$$

daher:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}}; \quad (2.)$$

Aus der Formel $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, erhält man denſelben Ausdruck, wenn zu beiden Theilen 1 addirt wird. Während in der Formel für $\sin \frac{1}{2} A$ die gegenüberſtehende Seite a von der Subtraktion ausgeſchloſſen iſt, ſo ſteht ſie hier allein und nur einmal ſubtraktiv.

Für B und C iſt daher:

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin a \sin c}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin a \sin b}}.$$

3) Da $\frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ iſt, ſo folgt aus (1) und (2)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}}; \quad (3.)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b + c - a) \sin \frac{1}{2}(b + a - c)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}};$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(c + b - a) \sin \frac{1}{2}(c + a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}}.$$

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten ſind dieſe Formeln beſonders vortheilhaft, da ſie das Geſuchte durch Tangenten, alſo ſchärfer als durch Sinus und Koſinus beſtimmen. Zur bequemern Berechnung der Trinomien

$\frac{1}{2}(a + b - c)$, $\frac{1}{2}(a + c - b)$, $\frac{1}{2}(b + c - a)$ ſetze man $\frac{1}{2}(a + b + c) = p$; dann iſt $\frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$; $\frac{1}{2}(a + c - b) = p - b$; $\frac{1}{2}(c + b - a) = p - a$; alſo:

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\tang\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\cdot\sin(p-a)}}.$$

4) Da $\sin A=2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$ iſt, ſo erhält man aus (1) und (2)

$$\sin A=\frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}{\sin b\sin c}.$$

Die unter dem Wurzelzeichen ſtehende Größe ändert ſich nicht, wenn man die Seiten a, b, c verwechſelt.

Bezeichnet man dieſen ſymmetriſchen Ausdruck mit g, ſo iſt $\sin A=\frac{2g}{\sin b\sin c}$.

Durch Vertauſchung $\sin B=\frac{2g}{\sin a\sin c}$; (4.)

und . . . . $\sin C=\frac{2g}{\sin a\sin b}$.

Dividirt man dieſe Gleichungen reſp. durch sin a, sin b, sin c, ſo erhält man:

$$\frac{2g}{\sin a\sin b\sin c}=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

Indem ſich auf dieſe Weiſe die zweite Hauptgleichung ergiebt, iſt es nicht unintereſſant, die Quotienten $\frac{\sin A}{\sin a}$, $\frac{\sin B}{\sin b}$, $\frac{\sin C}{\sin c}$ = dem ſymmetriſchen Ausdrucke $\frac{2g}{\sin a\sin b\sin c}$ zu finden.

Anmerk. Bei ebnen Dreiecken geben die gleichen Quotienten

$$\frac{a}{\sin A},\ \frac{b}{\sin B},\ \frac{c}{\sin C},\ \frac{a.b.c}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

den Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes. Wie ſich dieß bei

ſphäriſchen Dreiecken verhält, wird weiter unten in Betrachtung kommen.

§. 29.

Aus der vierten Hauptgleichung

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

laſſen ſich für $\sin \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} a$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$ ähnliche Formeln herleiten, die indeß aus den ſchon entwickelten ſich einfacher mittelſt des Polardreieckes ergeben. Wendet man nämlich die Gleichung:

1) $$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \, \sin c}};$$

auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix} \bar{a},\ b,\ c \\ \bar{A},\ B,\ C \\ \bar{a},\ b,\ c \end{matrix}\right\}$ an, ſo iſt:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\bar{A}+C-B) \sin \frac{1}{2}(\bar{A}+B-C)}{\sin B \sin C}};$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\pi - a) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\pi - A + C - B) \sin \frac{1}{2}(\pi - A + B - C)}{\sin B \sin C}};$$

daher:

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C}}; \quad (1.)$$

Hier ſteht alſo der der Seite a gegenüberliegende Winkel A **nicht** ſubtraktiv. Für b und c iſt daher:

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(B+C-A) \cos \frac{1}{2}(B+A-C)}{\sin A \sin C}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(C+B-A) \cos \frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A \sin B}}.$$

2) Die Gleichung

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(b+c+a)}{\sin b \, \sin c}};$$

auf daſſelbe Dreieck ($\bar{a}$ b c) angewendet, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{a}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C-\bar{A})\,\sin\frac{1}{2}(B+C+\bar{A})}{\sin B\sin C}},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\pi-a)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{2}(B+C-A+\pi)}{\sin B\ \sin C}}.$$

Nun iſt $\sin(\alpha\mp\frac{1}{2}\pi)=\mp\cos\alpha$,

daher:

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}};\ (2.)$$

Eben ſo:

$$\sin\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin C}};$$

und $$\sin\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}}.$$

Da die Summe der Winkel größer als zwei Rechte iſt (g. S. §. 24.), ſo iſt $\frac{1}{2}(A+B+C)>\frac{1}{2}\pi$, alſo $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ negativ, und $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ poſitiv. Daß auch die Koſinus von $\frac{1}{2}(A+B-C)$, $\frac{1}{2}(A+C-B)$, $\frac{1}{2}(B+C-A)$ immer poſitiv ſein müſſen, geht daraus hervor, daß die Summe zweier Winkel den dritten um weniger als zwei Rechte übertrifft (ib. Zuſ. 4.)

3) Für die Tangenten der halben Seiten erhält man aus (1) und (2):

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}};$$

$$\tan\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}};$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}};$$

welche Formeln für die Auflöſung des Falles §. 21. vortheilhaft ſind. Setzt man auch hier $\frac{1}{2}(A+B+C)=P$; ſo wird $\frac{1}{2}(A+B-C)=P-C$; u. ſ. w. und

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos P.\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}},$$

wodurch die numeriſche Berechnung abgekürzt wird.

4) Das Produkt $2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$ giebt hier für $\sin a$ einen ähnlichen Ausdruck wie oben für $\sin A$ gefunden wurde; nämlich:

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{\sin B \sin C}.$$

Wird die ſymmetriſche Wurzelgröße durch G bezeichnet, ſo iſt $\sin a = \frac{2G}{\sin B \sin C}$. Für b und c erhält man durch Verwechſelung:

$$\sin b = \frac{2G}{\sin A \sin C}; \quad \sin c = \frac{2G}{\sin A \sin C};$$

daher $\frac{2G}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$;

folglich $\frac{2G}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2g}$; (§. 28, 4.)

oder $4Gg = \sin A \sin B \sin C \sin a \sin b \sin c$.

5) Aus $\sin A = \frac{2g}{\sin b \sin c}$ (§. 28, 4.) und $\sin a = \frac{2G}{\sin B \sin C}$ folgt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{g \cdot \sin B \sin C}{G \cdot \sin b \sin c} = \frac{g \cdot \sin^2 A}{G \cdot \sin^2 a} \left(\text{weil } \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\right)$$

und hieraus die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{g}{G}.$$

§. 30.

Bezeichnet man in den für $\sin \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} B$, $\cos \frac{1}{2} A$ u. ſ. w. gefundenen Formeln $\sqrt{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$, $\sqrt{\sin \frac{1}{2}(c+b-a)}$, $\sqrt{\sin \frac{1}{2}(c+a-b)}$, $\sqrt{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}$ reſp. durch t, t', t'', t''' und $\sqrt{\sin a}$, $\sqrt{\sin b}$, $\sqrt{\sin c}$ durch s', s'', s''' ſo iſt:

1) $\sin \frac{1}{2} A = \frac{t'' t'''}{s'' s'''}$; 3) $\sin \frac{1}{2} C = \frac{t' t''}{s' s''}$;

2) $\sin \frac{1}{2} B = \frac{t' t'''}{s' s'''}$; 4) $\cos \frac{1}{2} A = \frac{t\, t'}{s'' s'''}$;

Digitized by Google

5) $\cos\frac{1}{2}B = \frac{t\,t''}{s'\,s'''}$; 6) $\cos\frac{1}{2}C = \frac{t\,t'''}{s'\,s''}$.

Multiplizirt man 1 und 2, ſo erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{t'\,t''\,t'''^2}{s'\,s''\,s'''^2} = \frac{t'\,t''}{s'\,s''}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c};$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\,.\,\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}. \quad \text{(I.)}$$

Dieſe Gleichung auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \overline{\gamma}\\ \overline{a} & \overline{b} & c\\ \overline{A} & \overline{B} & C\end{matrix}\right\}$ angewendet, giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\overline{A}\sin\frac{1}{2}\overline{B}}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}-c)}{\sin c},$$

d. i. $$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin(\pi-\frac{1}{2}(a+b+c))}{\sin c},$$

daher $$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c}; \quad \text{(II.)}$$

Wird die Gleichung (I.) auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\overline{\alpha} & \beta & \gamma\\ a & \overline{b} & \overline{c}\\ A & \overline{B} & \overline{C}\end{matrix}\right\}$

bezogen, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\,.\,\sin\frac{1}{2}\overline{B}}{\sin\frac{1}{2}\overline{C}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+\overline{b}-\overline{c})}{\sin\overline{c}},$$

und hieraus: $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c}; \quad \text{(III.)}$$

Durch Verwechſelung von A, a und B, b in vorſtehender Gleichung ergiebt ſich:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\,.\,\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c}; \quad \text{(IV.)}$$

Eben ſo einfach würde man die Gleichungen II, III, IV durch Multiplikation von 4 und 5; 1 und 5; 2 und 4 erhalten. In (II.) iſt klar, daß $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)$ poſitiv, alſo $(a+b+c) < 2\pi$ ſein muß. In den übrigen Gleichungen

findet ſich, daß die Summe zweier Seiten größer, als die dritte ſein muß.

Dividirt man (I.) durch (II.), ſo erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}. \quad \text{(V.)}$$

Wird (III.) durch (IV.) dividirt, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}; \quad \text{(VI.)}$$

welche Formeln auch aus §. 28, 3. ſogleich hergeleitet werden können. Sie ſind theils bei Auflöſung eines Dreieckes, wenn bereits drei Seiten und ein Winkel bekannt ſind; theils zur Prüfung der gefundenen Werthe nützlich.

Drückt man in (II.) $\sin c$ nach §. 29, 4. durch die Winkel aus, ſo erhält man den Perimeter $(a+b+c)$ ſymmetriſch durch die Winkel ausgedrückt, nämlich:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$= \frac{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \quad \text{(VII.)}$$
$$= \frac{G}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\,\sin\frac{1}{2}C}.$$

Dieſelbe Subſtitution in (I.) angewendet, giebt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{G}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}; \quad \text{(VIII.)}$$

§. 31.

Wird die Gleichung (I.) des vorigen §. auf das Polar-Nebendreieck $\begin{Bmatrix} a & b & \overline{c} \\ A & B & \overline{C} \\ a & b & \overline{c} \end{Bmatrix}$ angewendet, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a \,.\, \sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-\overline{C})}{\sin\overline{C}};$$

d. i. $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \,.\, \sin\frac{1}{2}b}{\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin(\pi-C)};$$

daher: $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \,.\, \sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sin C}. \quad \text{(I.)}$$

Die Gleichung (II.) auf $(a\,b\,\overline{c})$ bezogen, giebt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+\overline{C})}{\sin\overline{C}};$$

hieraus folgt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; \quad \text{(II.)}$$

Aus (III.) erhält man eben ſo:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\overline{C}-B)}{\sin\overline{C}};$$

daher $$\frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C}; \quad \text{(III.)}$$

und durch Verwechſelung:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C}. \quad \text{(IV.)}$$

Durch Diviſion erhält man aus vorſtehenden Gleichungen und zwar aus I. und II.:

$$\tan\frac{1}{2}a.\tan\frac{1}{2}b = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}; \quad \text{(V.)}$$

aus (III.) und (IV.):

$$\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\tan\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}; \quad \text{(VI.)}$$

Setzt man hier in I. für $\sin C$ den Werth $\frac{2g}{\sin a\,.\,\sin b}$ (§. 28, 4.), ſo erhält man durch die Seiten ſymmetriſch ausgedrückt:

$$-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{g}{2\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}.$$

In II. giebt dieſelbe Subſtitution und Reduktion:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B-C) = \frac{g}{2\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}.$$

Wie in (VI.) $\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\tan\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}$ iſt,

ſo iſt auch $\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}$

und . . $\frac{\tan\frac{1}{2}b}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$.

Hieraus folgt:

$$\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)} = \frac{\tan\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} \text{(VII.)}$$

eine Relation, die an das Sinusgeſetz $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ erinnert.

Aus $\frac{\tan\frac{1}{2}A}{\tan\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\cot\frac{1}{2}B}{\cot\frac{1}{2}A}$ (§. 30, VI.) folgt eine ähnliche:

$$\frac{\cot\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\cot\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}.$$

§. 32.

1) Addirt man die Gleichungen I. und II. des §. 30, nämlich: $\frac{\sin\frac{1}{2}A . \sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$

und $\frac{\cos\frac{1}{2}A . \cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c}$,

ſo erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) + \sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}.$$

Der zweite Theil zieht ſich nach der Formel $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ zuſammen in

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c . \cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Daher iſt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \quad \text{(A.)}$$

2) Subtrahirt man dieſelben Gleichungen und zwar I. von II., ſo ergiebt ſich:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B - \sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) - \sin(a+b-c)}{\sin c}$$

d. i. . . . . $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b) . \sin\frac{1}{2}c}{\sin c}$,

daher $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$. (B.)

3) Addirt man die Gleichungen III. und IV. deſſelben §.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin c},$$

und $\frac{\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin a},$

ſo iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)+\sin\frac{1}{2}(c-(a-b))}{\sin c}$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

daher $\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$; (C.)

4) Die Subtraktion giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)-\sin\frac{1}{2}(c-(a-b))}{\sin c}$$

d. i. $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$

folglich $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}$. (D.)

Durch dieſelben Verbindungen der Gleichungen I. und II, III und IV des §. 31. gelangt man zu denſelben hier entwickelten, ebenſo eleganten als wichtigen Gleichungen, die unter dem Namen der Gauß'ſchen Formeln bekannt ſind. *)

Zur leichtern Ueberſicht und Vergleichung mögen ſie hier zuſammen geſtellt werden.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (A.)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \quad (B.)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \quad (C.)$$

*) Wenigſtens hat Gauß erſt die Wichtigkeit dieſer, von Delambre allerdings früher bemerkten, Formeln gelehrt in dem trefflichen Werke: Theoria motus corporum coelestium. 1809.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (D.)$$

§. 33.

An die Gauß'ſchen Formeln ſchließen ſich die Neperſchen Analogien*), die für die Auflöſung der Dreiecke ſehr vortheilhaft ſind. Dividirt man (A) durch (B), ſo erhält man:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (I.)$$

Wird (D) durch (C) dividirt, ſo erhält man:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (II.)$$

Das Polar-Nebendreieck ($a, b, \bar{c}$) giebt aus (I.) und (II.):

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\cotg\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad (III.)$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\cotg\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad (IV.)$$

die man durch Diviſion von (C) durch (B) und (D) durch (A) erhalten haben würde.

Mit dieſen Neperſchen Formeln laſſen ſich die Fälle, wenn zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel, und wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln gegeben ſind, ſehr bequem auflöſen. In dem erſtern Falle, wenn gegeben iſt a, b, C, erhält man aus (III.) und (IV.):

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cotg\tfrac{1}{2}C;$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cotg\tfrac{1}{2}C;$$

und ſomit durch fünfmaliges Aufſchlagen die Winkel A und B auf einmal. Für die dritte Seite c erhält man aus (II.)

$$\tang\tfrac{1}{2}c = \tang\tfrac{1}{2}(a-b)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)};$$

*) Von Neper ſchon 1614 in ſeiner Mirifici canonis logarithmorum descriptio bekannt gemacht.

wozu die Logarithmen nicht erſt aufgeſchlagen zu werden brauchen, da ſie bei der Berechnung von A und B ſogleich angemerkt werden können.

In dem andern Falle, wenn A, B, c gegeben ſind, hat man aus (I.) und (II.)

$$\tang\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tang\tfrac{1}{2}c;$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tang\tfrac{1}{2}c;$$

und hieraus a und b. Der dritte Winkel C findet ſich aus III. (oder IV.)

$$\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cotg\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Dividirt man (I.) durch (II.) oder (III.) durch (IV.), ſo ergiebt ſich die bemerkenswerthe Proportion:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\tang\frac{1}{2}(A-B)},$$

eine dem Sinusgeſetze $\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}$ ähnliche Relation, mit dem ſie auch in der That faſt identiſch iſt. Denn es iſt (§. 2, 55.) $\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$. Daher folgt aus obiger Proportion unmittelbar:

$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$, und aus dieſer

$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B}$. Umgekehrt folgt aus dieſer Proportion die obige.

Außer den vier Diviſionen der Gauß'ſchen Formeln, wodurch die Neperſchen hergeleitet wurden, laſſen jene Gleichungen noch zwei Kombinationen derſelben Art zu; nämlich die Diviſion 1) von (A) durch (C), und 2) (B) durch (D). Durch dieſe ergeben ſich noch zwei Formeln:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cot g\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cot g\tfrac{1}{2}c; \quad (V.)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cot g\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan g\tfrac{1}{2}c;\text{*)}\quad (VI.)$$

§. 34.

Kombinirt man die Gauß'ſchen Formeln durch Multiplikation je zweier, und zwar

1) (A) und (B), ſo erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin^2\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c\,.\,\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin\frac{2}{2}(a+b)}{\sin c},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des erſten Theils mit 2 multiplizirt und nach §. 2, 45 und 24 verwandelt:

$$\frac{\cos A + \cos B}{1-\cos C} = \frac{\sin(a+b)}{\sin c}. \quad (1.)$$

Dieſelben Gleichungen erhält man auch ſehr einfach durch Addition der Gleichungen (A. 1.) und (A. 2.) des §. 24.

2) Multiplizirt man (C) und (D), ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos^2\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\ \cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\,.\,\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin(a-b)}{\sin c};$$

der erſte Theil nach §. 2, 46 und 25 verwandelt, giebt:

$$\frac{\cos B - \cos A}{1+\cos C} = \frac{\sin(a-b)}{\sin c}. \quad (2.)$$

Die Subtraktion der oben angeführten Gleichungen (A. 1.) und (A. 2.) giebt daſſelbe Reſultat, ſo wie auch die Anwendung der Gleichung (1.) auf das Nebendreieck $(\alpha\,\overline{\beta}\,\gamma)$.

---

*) Die zweite dieſer Formeln iſt zuerſt von Delambre, die erſte von A. Burg (Handbuch der geradlin. und ſphäriſchen Trigon. 1826.) bemerkt worden.

3) Dieſe Gleichungen (1.) und (2.) auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix} a, & b, & \overline{c} \\ A, & B, & \overline{C} \\ a, & b, & \overline{c} \end{matrix}\right\}$ bezogen, geben die Produkte von (A).(D) und (B).(C), nämlich:

$$\frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c} = \frac{\sin(A+B)}{\sin C}; \qquad (3.)$$

4) und $$\frac{\cos b - \cos a}{1 - \cos c} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}. \qquad (4.)$$

Die noch übrigen Multiplikationen (A) mit (C) und (B) mit (D) führen wieder auf das Sinusgeſetz.

§. 35.

Subtrahirt man 1 von beiden Theilen der Gleichung (1) des vorigen §.

$$\frac{\cos A + \cos B}{1 - \cos C} - 1 = \frac{\sin(a+b)}{\sin c} - 1,$$

ſo erhält man:

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{1 - \cos C} = \frac{\sin(a+b) - \sin c}{\sin c},$$

oder, indem der zweite Theil nach §. 2, 44. verwandelt wird

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{2 . \sin^2 \frac{1}{2} C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}, \quad (5.)$$

welche Gleichung ſchon deshalb bemerkenswerth iſt, weil der Koſinus von $\frac{1}{2}(a+b+c)$ darin enthalten iſt, da bisher nur der Sinus vorkam.

2) Addirt man 1 zu beiden Theilen derſelben Gleichung, ſo folgt:

$$\frac{\cos A + \cos B}{1 - \cos C} + 1 = \frac{\sin(a+b)}{\sin c} + 1,$$

daher $$\frac{\cos A + \cos B - \cos C + 1}{1 - \cos C} = \frac{\sin(a+b) + \sin c}{\sin c},$$

hieraus:

$$\frac{\cos A + \cos B - \cos C + 1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cos \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}. \quad (6.)$$

3) Die Gleichung (2.) des vorigen §. ebenſo behandelt, giebt:

$$\frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C} + 1 = \frac{\sin(a - b)}{\sin c} + 1;$$

hieraus: $\frac{-\cos A + \cos B + \cos C + 1}{1 + \cos C} = \frac{\sin(a - b) + \sin c}{\sin c}$,

daher:

$$\frac{-\cos A + \cos B + \cos C + 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c}. \quad (7.)$$

4) Durch Verwechſelung von A, a mit B, b ergiebt ſich hieraus das Reſultat der Subtraktion:

$$\frac{\cos A - \cos B + \cos C + 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}C} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\cos\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin c}. \quad (8.)$$

5) Die Gleichungen 6, 5, 8 nach der Reihe auf das Polar-Nebendreieck ($a, b, \bar{c}$) bezogen, geben folgende:

$$\frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}c} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; (9.)$$

$$\frac{\cos a + \cos b - \cos c - 1}{2\cos^2 \tfrac{1}{2}c} = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; (10.)$$

$$\frac{\cos a - \cos b - \cos c + 1}{2\sin^2 \tfrac{1}{2}c} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)\cos\tfrac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C}; (11.)$$

und durch Verwechſelung von a, A mit b, B:

$$\frac{-\cos a + \cos b - \cos c + 1}{2\sin^2 \tfrac{1}{2}c} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(C+A-B)\cos\tfrac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C}; (12.)$$

Drückt man in den Gleichungen (5) — (12) jeden Koſinus des erſten Theils nach §. 2, 21. aus, ſo erhält man:

$$\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B + \cos^2\tfrac{1}{2}C - 2}{\sin^2\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}B - \sin^2\tfrac{1}{2}C}{\sin^2\tfrac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B + \sin^2\tfrac{1}{2}C - 1}{\sin^2\tfrac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B + \cos^2\tfrac{1}{2}C - 1}{\cos^2\tfrac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(c+a-b)\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c}=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}A+\sin^2\tfrac{1}{2}B+\cos^2\tfrac{1}{2}C-1}{\cos^2\tfrac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{\cos^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$=\frac{2-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}c}{\cos^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{\cos^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\sin^2\tfrac{1}{2}c-2}{\cos^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$=\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}c-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b}{\cos^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(C+A-B)\cos\tfrac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C}=\frac{-\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c+1}{\sin^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$=\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b+\sin^2\tfrac{1}{2}c}{\sin^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)\cos\tfrac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C}=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c+1}{\sin^2\tfrac{1}{2}c};$$

$$=\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}a}{\sin^2\tfrac{1}{2}c}.$$

§. 36.

Die Gleichung (5) des vorigen §.:

$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{2\sin^2\tfrac{1}{2}C}=\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

durch die Gleichung

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B}{\sin\tfrac{1}{2}C}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}\quad(\text{§. 30, I.})$$

dividirt, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4\sin\tfrac{1}{2}A\,.\sin\tfrac{1}{2}B\,.\sin\tfrac{1}{2}C};\quad(13.)$$

$$=\frac{1-\sin^2\tfrac{1}{2}A-\sin^2\tfrac{1}{2}B-\sin^2\tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}A\,.\sin\tfrac{1}{2}B\,.\sin\tfrac{1}{2}C}.$$

Durch das Nebendreieck ($\alpha\,\beta\,\overline{\gamma}$) folgt hieraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\cos A+\cos B-\cos C+1}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C};$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C-1}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.\quad(14.)$$

Hieraus durch Verwechſelung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{\cos A-\cos B+\cos C+1}{4\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\quad(15.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a)=\frac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{4\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C};\quad(16.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Aus (13) und (14) erhält man durch Anwendung des Polar-Nebendreiecks ($a\ b\ \overline{c}$):

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};\quad(17.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{-\cos a-\cos b+\cos c+1}{4\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c};\quad(18.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Hieraus durch Vertauſchung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\frac{-\cos a+\cos b-\cos c+1}{4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c};\quad(19.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)=\frac{\cos a-\cos b-\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c};\quad(20.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}.$$

Dividirt man die Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{G}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \quad (\S.\ 30,\ VII.)$$

durch die Gleichuug (13) dieſes §., ſo ergiebt ſich:

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{2G}{\cos A+\cos B+\cos C-1}; \qquad (21.)$$

$$=\frac{G}{1-\sin^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C}.$$

Dieſe Gleichung auf das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\bar{\gamma})$ angewendet, giebt:

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{2G}{\cos A+\cos B-\cos C-1}; \qquad (22.)$$

$$=\frac{G}{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C-1}.$$

Durch Verwechſelung erhält man die zu $\tan\frac{1}{2}(a+c-b)$ und $\tan\frac{1}{2}(c+b-a)$ gehörigen Formeln.

Die Gleichungen (22) und (21) auf das Polar-Nebendreieck $(a\ b\ \bar{c})$ angewendet, ergeben:

$$\left.\begin{array}{r}\tan\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\\ \text{oder } -\cot\frac{1}{2}(A+B+C)\end{array}\right\}=\frac{2g}{1+\cos a+\cos b+\cos c}; (23.)$$

$$=\frac{g}{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1};$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{2g}{1-\cos a-\cos b+\cos c}; \quad (24.)$$

$$=\frac{g}{\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}.$$

§. 37.

Setzt man in der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad (\S.\ 36,17.)$$

für $\cos c$ den aus der erſten Hauptgleichung ſich ergebenden Werth $\cos a.\cos b+\sin a\sin b\cos C$, ſo erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C)$$
$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos a\,.\cos b+\sin a\,.\sin b\cos C}{4\cos \tfrac{1}{2}a\ \cos \tfrac{1}{2}b\ \cos \tfrac{1}{2}c};$$
$$= \frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\cdot\sin b\cos C}{4\cos \tfrac{1}{2}a\,.\cos \tfrac{1}{2}b\,.\cos \tfrac{1}{2}c};$$
$$= \frac{4\cos^2 \tfrac{1}{2}a\cos^2 \tfrac{1}{2}b+4\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b\sin \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}b\cos C}{4\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b\cos \tfrac{1}{2}c};$$

daher, wenn durch $4\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b$ Zähler und Nenner des zweiten Theils dividirt werden:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b+\sin \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos \tfrac{1}{2}c}. \quad (25.)$$

Das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$ giebt hieraus:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B}+C) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\overline{a}\cos \tfrac{1}{2}\overline{b}+\sin \tfrac{1}{2}\overline{a}\sin \tfrac{1}{2}\overline{b}\cos C}{\cos \tfrac{1}{2}c},$$

d. i.

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}b+\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b\ \cos C}{\cos \tfrac{1}{2}c}. \quad (26.)$$

Das Nebendreieck $(\overline{\alpha}\,\beta\,\gamma)$ giebt aus (25.):

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+\overline{B}+\overline{C}) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}\overline{b}+\sin \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}\overline{b}\cos \overline{C}}{\cos \tfrac{1}{2}\overline{c}},$$

daher:

$$\sin \tfrac{1}{2}(C+B-A) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}b-\sin \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin \tfrac{1}{2}c}; \quad (27.)$$

und hieraus folgt durch Verwechſelung:

$$\sin \tfrac{1}{2}(C+A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}a\cos \tfrac{1}{2}b-\cos \tfrac{1}{2}a\sin \tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin \tfrac{1}{2}c}. \quad (28.)$$

Aus (26.) erhält man durch das Polar-Nebendreieck $(a\ b\ \overline{c})$:

$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b-\overline{c}) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}A\sin \tfrac{1}{2}B+\cos \tfrac{1}{2}A\cos \tfrac{1}{2}B\cos \overline{c}}{\cos \tfrac{1}{2}\overline{C}};$$

daher:

$$-\cos \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}A\sin \tfrac{1}{2}B-\cos \tfrac{1}{2}A\cos \tfrac{1}{2}B\cos c}{\sin \tfrac{1}{2}C}; \quad (29.)$$

Ebenſo folgt aus (25.) und (28.):

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\sin\tfrac{1}{2}C}; \quad (30.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}; \quad (31.)$$

und durch Verwechſelung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+a-b)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}. \quad (32.)$$

Dividirt man obige Gleichung (25.)

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

durch $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$ (§. 31, I.)

ſo erhält man:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C},$$

und wenn man den zweiten Theil durch $\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b$ abkürzt:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cotg\tfrac{1}{2}a\cotg\tfrac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}. \quad (33.)$$

Auf das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$ bezogen, giebt dieſe Gleichung:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B}+C)=\frac{\cotg\tfrac{1}{2}\overline{a}\cotg\tfrac{1}{2}\overline{b}+\cos C}{\sin C}.$$

Daraus folgt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{\tang\tfrac{1}{2}a\tang\tfrac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}; \quad (34.)$$

Ebenſo erhält man durch $(\overline{\alpha}\,\beta\,\gamma)$ aus (33.):

$$\tang\tfrac{1}{2}(C+B-A)=\frac{\cotg\tfrac{1}{2}a\,.\tang\tfrac{1}{2}b-\cos C}{\sin C}; \quad (35.)$$

durch Verwechſelung:

$$\tang\tfrac{1}{2}(C+A-B)=\frac{\tang\tfrac{1}{2}a\,.\cotg\tfrac{1}{2}b-\cos C}{\sin C}; \quad (36.)$$

Das Polar-Nebendreieck $(a\,b\,\overline{c})$ giebt aus (34.):

$$-\cotg\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\tang\tfrac{1}{2}A.\tang\tfrac{1}{2}B-\cos c}{\sin c}; \quad (37.)$$

aus (33.):

$$\cot g \tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{\cot g \frac{1}{2}A \cot g \frac{1}{2}B - \cos c}{\sin c}; \qquad (38.)$$

aus (36.):

$$\cot g \tfrac{1}{2}(c+b-a) = \frac{\tan g \frac{1}{2}A \,.\, \cot g \frac{1}{2}B + \cos c}{\sin c}; \qquad (39.)$$

aus (35.), oder wenn man hier a, A mit b, B verwechſelt:

$$\cot g \tfrac{1}{2}(c+a-b) = \frac{\cot g \frac{1}{2}A \,.\, \tan g \frac{1}{2}B + \cos c}{\sin c}; \qquad (40.)$$

§. 38.

Die Formeln des §. 36. laſſen ſich mittelſt der §. 4. bemerkten Formeln in ſehr elegante Ausdrücke umwandeln, die hier noch aufgeſtellt werden ſollen.

Schreibt man in der Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}a + \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}c - 1}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} \quad (§. 36, 17.)$$

$\cos \frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$ für $\sin \frac{1}{2}(A+B+C)$ ſo iſt

$$1 - \cos \tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{1}{2}a + \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}c - 1}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c};$$

daher:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi) = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2}a - \cos^2 \frac{1}{2}b - \cos^2 \frac{1}{2}c + 2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Zieht man den zweiten Theil zuſammen, nach §. 4, 1., ſo erhält man:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi) = \frac{4 \sin \frac{1}{4}(a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a+b-c) \sin \frac{1}{4}(a+c-b) \sin \frac{1}{4}(c+b-a)}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c};$$

daher:

$$\sin \tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a+b-c) \sin \frac{1}{4}(a+c-b) \sin \frac{1}{4}(c+b-a)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}. \qquad (41.)$$

Ferner iſt

$$1 + \cos \tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = 1 + \frac{\cos^2 \frac{1}{2}a + \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}c - 1}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c};$$

daher

$$2\cos^2\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=-$$

$$\left(\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c-2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{4\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(c+b-a)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

alſo:

$$\cos\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}; \quad (42.)$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt das Nebendreieck ($\alpha\,\beta\,\overline{\gamma}$):

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)\cos\frac{1}{4}(c+b-a)\cos\frac{1}{4}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}; \quad (43.)$$

Auf die Gleichung (41.) angewendet, giebt daſſelbe Nebendreieck:

$$\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)\sin\frac{1}{4}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}; \quad (44.)$$

Durch Verwechſelung erhält man aus (43.) und (44.) die entſprechenden Formeln für den Sinus und Koſinus von $\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)$ und $\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)$.

Die Diviſion der Gleichung (41.) durch (42.) ergiebt die ſehr elegante Formel:

$$\tan\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$

$$\sqrt{\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)\tan\tfrac{1}{4}(a+c-b)\tan\tfrac{1}{4}(c+b-a)};^{*)} \quad (45.)$$

Dividirt man (43.) durch (44.), ſo erhält man eine ähnliche:

$$\tan\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)$$

$$=\sqrt{\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cot\tfrac{1}{4}(c+a-b)\cot\tfrac{1}{4}(c+b-a)}$$

$$=\sqrt{\frac{\tan\frac{1}{4}(a+b+c)\tan\frac{1}{4}(a+b-c)}{\tan\frac{1}{4}(c+b-a)\tan\frac{1}{4}(c+a-b)}}. \quad (46.)$$

*) L'Huilier iſt der Erfinder derſelben.

Durch Verwechſelung erhält man hiezu:

$$\tang \tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(a+c-b)}{\tang\frac{1}{4}(a+b-c)\tang\frac{1}{4}(b+c-a)}}; \tag{47.}$$

$$\tang \tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(c+b-a)}{\tang\frac{1}{4}(a+c-b)\tang\frac{1}{4}(a+b-c)}}; \tag{48.}$$

Dieſe Formeln (45.) — (48.) ſind ſehr brauchbar zur Auflöſung eines Dreieckes, wenn drei Seiten gegeben ſind, da durch Tangenten eine größere Schärfe erreicht werden kann, als durch Sinus oder Koſinus.

Durch das Polar-Nebendreieck $(a\ \overline{b\ c})$ erhält man aus den Gleichungen (41.)—(44.), und zwar

aus (43.):

$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}A\ \sin\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}} \tag{49.}$$

aus (44.):

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}A\ \sin\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}} \tag{50.}$$

aus (41.):

$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}} \tag{51.}$$

aus (42.):

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}} \tag{52.}$$

Die Diviſion der Gleichung (49.) durch (50.) giebt:

$$\tang\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\tang\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\tang\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)\tang\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\tang\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)} \tag{53.}$$

Ebenſo folgt aus (51.) und (52.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c) =$$

$$\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}}; \quad (54.)$$

§. 39.

Multiplizirt man die Gleichung (41.) des vorigen §. mit (42.), ſo ergiebt ſich:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi) =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Nun iſt:

$$\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a \sin b}} = \sin\tfrac{1}{2}C \quad (\S.\ 28,\ 1.);$$

daher, wenn man dies ſubſtituirt und beide Theile der Gleichung mit $\sin\frac{1}{2}C$ dividirt:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\sin\tfrac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}c}; \quad (55.)$$

Durch Multiplikation von (41.) mit (44.) ergiebt ſich:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi) =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}};$$

$$= \frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}.\cos\tfrac{1}{2}C; \quad (\S.\ 28,\ 2.)$$

alſo:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}. \quad (56.)$$

Das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$ giebt

aus (56.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{4}(c+b-a)\cos\frac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \quad (57.)$$

aus (55.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}c}; \quad (58.)$$

Das Nebendreieck $(a\,\overline{\beta}\,\gamma)$ giebt

aus (57.):

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (59.)$$

aus (56.):

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (60.)$$

aus (55.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (61.)$$

aus (58.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (62.)$$

Löſt man die Produkte in dieſen Gleichungen nach den Formeln §. 1, 39—42. auf, ſo verwandeln ſie ſich in die

Gauß'ſchen Formeln, aus denen umgekehrt die gegenwärtigen ſogleich abgeleitet werden können, wenn man auf beiden Seiten jeder Gleichung 1 addirt oder ſubtrahirt.

§. 40.

Aus dieſen Gleichungen erhält man durch Diviſion von (55.) durch (58.):

$$\tang\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\tang\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi) = \tang\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tang\tfrac{1}{4}(a+b-c); \quad (63.)$$

(56.) durch (57.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\tang\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)} = \tang\tfrac{1}{4}(c+a-b)\tang\tfrac{1}{4}(c+b-a); \quad (64.)$$

(59.) durch (62.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)}{\tang\frac{1}{4}(a+b-c)} = \tang\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\tang\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi); \quad (65.)$$

(60.) durch (61.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)}{\tang\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)} = \frac{\tang\frac{1}{4}(a-b+c)}{\tang\frac{1}{4}(b-a+c)}; \quad (66.)$$

(55.) durch (57.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\tang\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{4}(c+a-b)\cos\frac{1}{4}(c+b-a)}; \quad (67.)$$

(55.) durch (56.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\tang\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}; \quad (68.)$$

(59.) durch (61.):

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)}{\tang\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}; \quad (69.)$$

(56.) durch (58.):

$$\tang\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi).\tang\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}; \quad (70.)$$

(57.) durch (58.):

$$\tang\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)\tang\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{4}(c+a-b)\cos\frac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}; \quad (71.)$$

(60.) durch (62.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B+C+\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\cos\frac{1}{2}(c+b-a)}{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)};\qquad(72.)$$

(59.) durch (58.):

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)};\qquad(73.)$$

(62.) durch (58.):

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)};\qquad(74.)$$

(60.) durch (57.):

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(c+a-b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)};\qquad(75.)$$

(55.) durch (62.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)};\qquad(76.)$$

(55.) durch (59.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)};\qquad(77.)$$

(56.) durch (61.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+a-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{2}(A+B-C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{2}(B-A+C+\pi)};\qquad(78.)$$

§. 41.

Es iſt noch übrig, den Flächenraum T des ſphäriſchen Dreieckes durch Formeln zu beſtimmen. Da derſelbe dem Ueberſchuſſe der Winkelſumme über zwei Rechte gleich iſt ($=A+B+C-\pi$), ſo brauchen wir nur unter den bisher entwickelten Gleichungen und Formeln diejenigen, welche ($A+B+C$) enthalten, herauszuſuchen und zuſammenzuſtellen,

indem für $(A+B+C-\pi)$ ſogleich T, für $A+B+C$ aber $T+\pi$ geſetzt werden kann.

Aus der Gleichung (§. 31, II.)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin C},$$

erhält man zunächſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin C}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad (A.)$$

welche Formel Aehnlichkeit mit der planimetriſchen

$$\tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\sin C$$

hat, in welche ſie ſich auch verwandelt, wenn die Seiten des ſphäriſchen Dreieckes unendlich klein werden.

Setzt man für $\sin C$ den Werth $\frac{2g}{\sin a \sin b}$, ſo erhält man nach gehöriger Reduktion den Ausdruck:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \quad (B.)$$

welcher dieſelbe Analogie mit der Tartalea'ſchen Formel

$$T = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\tfrac{1}{2}(c+b-a)}$$

zeigt. Bequem zur logarithmiſchen Berechnung iſt die Formel (B) allerdings. Da indeß $\frac{1}{2}T < \frac{1}{2}\pi$ und $> \frac{1}{2}\pi$ ſein kann, ſo iſt ſie zweideutig; daher die weiter unten (G) angeführte ungleich einfachere Formel von L'Huilier ihr ſchon deshalb entſchieden vorzuziehen.

Aus §. 36. erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{2-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \quad (C.)$$

Hieraus läßt ſich eine Entſcheidung der in (B) vorhandenen Zweideutigkeit herleiten. Iſt nämlich $T<\pi$, ſo iſt $\cos\frac{1}{2}T$ poſitiv, daher muß $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c>1$ ſein. Iſt $T>\pi$, ſo iſt $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c<1$. Für $T=\pi$ iſt $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c=1$.

Aus der Gleichung

$$-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{2g}{\cos a+\cos b+\cos c+1}$$

erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}T=\frac{2g}{\cos a+\cos b+\cos c+1} \qquad (D.)$$

$$=\frac{g}{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}=\frac{g}{2-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}c}.$$

Aus §. 38, No. 41, 42, 45. erhält man die Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (E.)$$

$$\cos\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (F.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(c+b-a)}; \quad (G.)$$

unter denen die letzte vorzüglich bequem zur logarithmiſchen Berechnung iſt. Zweideutigkeit findet hier nicht ſtatt, da $T<2\pi$, alſo $\tfrac{1}{4}T<\tfrac{1}{2}\pi$ ſein muß.

Während in dieſen Formeln der Flächenraum durch die Seite des Dreieckes beſtimmt wird, erhält man ihn durch zwei Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel ausgedrückt nach §. 37, — in der Formel

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}T=\frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}; \qquad (H.)$$

Die Verwandtſchaft derſelben mit der oben (A) angeführten planimetriſchen Formel $\tfrac{1}{2}T=\tfrac{1}{2}a.\tfrac{1}{2}b.\sin C$ wird ſichtbar, wenn man beide Theile der Formel umkehrt und den Zähler und Nenner des zweiten Theiles mit $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b$ multiplizirt. Sie erhält dann die Form

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}T=\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b.\sin C}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\cos C}. \qquad (I.)$$

Iſt das ſphäriſche Dreieck ein rechtwinkliges und zwar C der rechte Winkel, ſo erhält man den merkwürdigen Ausdruck

$$\tan\tfrac{1}{2}T = \tan\tfrac{1}{2}a \cdot \tan\tfrac{1}{2}b.$$

wie bei dem ebnen rechtwinkligen Dreiecke $\tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b$.

§. 42.

Andere Relationen zwiſchen dem Flächenraume, den Seiten und Winkeln des Dreieckes finden ſich in den bis §. 40. entwickelten Gleichungen noch mehrere. Bemerkenswerth iſt beſonders die Gleichung

$$\tan\tfrac{1}{2}a \tan\tfrac{1}{2}b = \frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}. \quad (\text{§. 31, V.})$$

Indem für $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ geſetzt wird $\sin\tfrac{1}{2}T$, erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \tan\tfrac{1}{2}a \cdot \tan\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C);\ ^{*})$$

aus welcher Formel ſich der Satz vom Maximum des Flächenraumes bei zwei gegebenen Seiten (g. S. §. 86. u. 87.) leicht ergiebt. Denn ſind die Seiten a, b unveränderlich, ſo ändert ſich T nur nach $(A+B-C)$. Das Maximum von $\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)$ iſt $=1$, wo dann $A+B-C=o$, oder $A+B=C$ iſt. Dann liegt aber das Dreieck in einem Halbkreiſe (g. S. §. 75, Zuſ. 2.), d. h. die dritte Seite c iſt der ſphäriſche Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes. Nun iſt jedoch das Maximum von T mit dem von $\sin\tfrac{1}{2}T$ nur dann verbunden, wenn $\sin\tfrac{1}{2}T$ mit T beſtändig wächſt, d. i. wenn T nicht $>\pi$, oder wenn $A+B+C$ nicht $>2\pi$ werden kann. Da indeß die Schenkel a, b jede beliebige Oeffnung erhalten können, ſo kann C ſo nahe an π kommen, als man will. Soll dabei nun die Summe $A+B+C$ nicht $>2\pi$ werden, ſo darf $A+B$ nicht $>\pi$ werden; daher muß $a+b$ nicht $>\pi$ ſein; — dieſelbe Bedingung des Maximums, welche g. S. §. 86, 87, 88 nachgewieſen wurde.

---

*) Man bemerke, daß auch bei ebnen Dreiecken die Formel $\tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b \cdot \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)$ gilt, die mit der oben erwähnten zuſammenfällt, indem hier $A+B+C=\pi$, alſo $\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\sin C$ iſt.

Für das Maximum, wo $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=1$ iſt, erhält man die merkwürdige Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}T=\tang\tfrac{1}{2}a.\tang\tfrac{1}{2}b,$$

die ein zweites Analogon zu dem ebnen rechtwinkligen Dreiecke, das ebenfalls im Halbkreiſe liegt und das Maximum der Katheten iſt, liefert.

Oben (§. 41.) wurde für das rechtwinklige ſphäriſche Dreieck aus den Katheten a, b der Ausdruck

$$\tang\tfrac{1}{2}T=\tang\tfrac{1}{2}a\,\tang\tfrac{1}{2}b$$

gefunden. Hieraus iſt erſichtlich, wie ſich das rechtwinklige ſphäriſche Dreieck zu dem Maximum, das durch die Katheten bedingt wird, verhält. Wird der Flächenraum des letztern mit M, der des rechtwinkligen Dreieckes mit L bezeichnet, ſo iſt:

$$\tang\tfrac{1}{2}L=\sin\tfrac{1}{2}M,$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}L}{\sin\frac{1}{2}M}=\frac{\cos\frac{1}{2}L}{1}.$$

Um das Verhältniß von M und L ſelbſt geometriſch darzuſtellen, nehme man (Fig. 5.) den Bogen $AC=\frac{1}{2}M$; errichte in C ein Perpendikel und ziehe unter einem halben Rechten (CAB) den Bogen AB; ſo iſt $CB=\frac{1}{2}L$. Denn es iſt $\tang BC=\tang CAB.\sin AC=\sin AC=\sin\frac{1}{2}M$; alſo $\tang BC=\tang\frac{1}{2}L$ und $BC=\frac{1}{2}L$.

Wie ein Bogen zu konſtruiren iſt, der dem Flächenraume eines ſphäriſchen Dreieckes gleich iſt, wird weiter unten gezeigt werden.

§. 43.

Für den Perimeter $(a+b+c)$ des ſphäriſchen Dreieckes finden ſich ähnliche Ausdrücke, wie für den Flächenraum, die leicht nachgeſehen werden können. Bemerkenswerth ſind die Beziehungen, welche zwiſchen den Perimetern, Flächenräumen, Seiten und Winkeln der Nebendreiecke ſtatt finden. Bezeichnen wir mit P den Umfang des Dreieckes $(\alpha\beta\gamma)$; mit P', P'', P''' die der Nebendreiecke $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$,

$(\alpha\bar{\beta}\gamma)$, $(\alpha\beta\bar{\gamma})$; ferner mit T', T'', T''' die Flächenräume derſelben; ſo iſt

$$P' = a + \bar{b} + \bar{c} = 2\pi - (c + b - a).$$ Eben ſo
$$P'' = 2\pi - (a + c - b);$$
$$P''' = 2\pi - (a + b - c).$$

Ferner iſt
$$T' = A + \bar{B} + \bar{C} - \pi = 2\pi - (C + B - A + \pi);$$
$$= \pi - (C + B - A);$$
$$T'' = 2\pi - (A + C - B + \pi) = \pi - (A + C - B);$$
$$T''' = 2\pi - (A + B - C + \pi) = \pi - (A + B - C).$$

Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in der Formel

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}{\sin b \sin c}$$

ſo erhält man:

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}P \,.\, \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}}{\sin b \sin c}.$$

Die Formel $\sin a = \frac{2G}{\sin B \sin C}$ (§. 29.) verwandelt ſich dann in folgende:

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''}}{\sin B \sin C}.$$

Die §. 29. bemerkte Relation $\frac{g}{G} = \frac{\sin a}{\sin A}$ erhält man unter der Form

$$\frac{\sin\frac{1}{2}P \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}{\sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 A}.$$

Aus der Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{4}(A + B + C - \pi)\tang\tfrac{1}{4}(A + B - C + \pi) = \tang\tfrac{1}{2}(a + b + c)\tang\tfrac{1}{2}(a + b - c)$$

erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{4}T \,.\, \cotg\tfrac{1}{4}T''' = \tang\tfrac{1}{4}P \,.\, \cotg\tfrac{1}{4}P''',$$

oder . . . . $\frac{\tang\frac{1}{4}T}{\tang\frac{1}{4}T'''} = \frac{\tang\frac{1}{4}P}{\tang\frac{1}{4}P'''}.$

Es findet alſo zwiſchen den Flächenräumen und Umfängen zweier Dreiecke, die unmittelbar Nebendreiecke von einander

ſind, oder die zuſammen eine ſphäriſche Spindel bilden, die bemerkenswerthe Beziehung ſtatt, daß die Tangenten der Viertel-Flächenräume den Tangenten der Viertel-Umfänge proportionirt ſind.

Aus der Gleichung

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)}{\tang\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}=\frac{\tang\frac{1}{4}(a-b+c)}{\tang\frac{1}{4}(b-a+c)}\quad (\S.\ 40,\ 66.)$$

ergiebt ſich . $\frac{\tang\frac{1}{4}T'}{\tang\frac{1}{4}T''}=\frac{\tang\frac{1}{4}P'}{\tang\frac{1}{4}P''}$.

Alſo auch bei den zwei übrigen Nebendreiecken des Syſtemes $\alpha\beta\gamma$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\gamma$, $\alpha\beta\bar{\gamma}$ findet dieſelbe Proportionalität ſtatt. Sie gilt daher bei jeden beliebigen zwei Dreiecken des genannten Syſtemes.

Aus der Gleichung

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\tang\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}=\tang\tfrac{1}{4}(c+a-b)\tang\tfrac{1}{4}(c+b-a)$$

(§. 40, 64.)

erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{4}T\tang\tfrac{1}{4}T'''=\cotg\tfrac{1}{4}P'\cotg\tfrac{1}{4}P'',$$

oder $\tang\frac{1}{4}T\tang\frac{1}{4}T'''\tang\frac{1}{4}P'\tang\frac{1}{4}P''=1$;

durch Verwechſelung ergiebt ſich dazu:

$$\tang\tfrac{1}{4}T\tang\tfrac{1}{4}T'\tang\tfrac{1}{4}P''\tang\tfrac{1}{4}P'''=1;$$
$$\tang\tfrac{1}{4}T\tang\tfrac{1}{4}T''\tang\tfrac{1}{4}P'\tang\tfrac{1}{4}P'''=1.$$

Ferner iſt nach §. 40, 65.

$$\tang\tfrac{1}{4}T'\tang\tfrac{1}{4}T''\tang\tfrac{1}{4}P\tang\tfrac{1}{4}P'''=1;$$
$$\tang\tfrac{1}{4}T'\tang\tfrac{1}{4}T'''\tang\tfrac{1}{4}P\tang\tfrac{1}{4}P''=1;$$
$$\tang\tfrac{1}{4}T''\tang\tfrac{1}{4}T'''\tang\tfrac{1}{4}P\tang\tfrac{1}{4}P'=1.$$

In dem Syſteme der vier Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\gamma$, $\alpha\beta\bar{\gamma}$, iſt alſo das Produkt aus den Tangenten der Viertelflächenräume beliebig zweier und der Viertel-Umfänge der andern beiden unveränderlich $=1$.

Daraus folgt noch:

$$\tang\tfrac{1}{4}T\tang\tfrac{1}{4}T'\tang\tfrac{1}{4}T''\tang\tfrac{1}{4}T'''\tang\tfrac{1}{4}P$$
$$\tang\tfrac{1}{4}P'\tang\tfrac{1}{4}P''\tang\tfrac{1}{4}P'''=1.$$

Proportionen in ſphäriſchen Dreiecken und in Nebenkreiſen.

§. 44.

Erklärung. Wenn von einer Winkelſpitze A eines ſphäriſchen Dreieckes ABC (Fig. 6.) nach der gegenüberliegenden Seite a ein Bogen AD gezogen wird, ſo werden die dadurch entſtandenen Abſchnitte des Winkels A und der Seite a reſp. durch A″, A‴, a″, a‴ bezeichnet, und zwar ſo, daß A″, a″ die auf der Seite von B liegenden, A‴, a‴ aber die nach C hin liegenden Abſchnitte bedeuten. In Fig. 6. wird demnach DB durch a″; DC durch a‴; DAB durch A″; DAC durch A‴ angedeutet. Geht der Bogen von der Spitze B nach der Seite b, ſo werden die Winkel- und Seitenabſchnitte auf der Seite von A durch B′, b′; die auf der Seite von C liegenden (EBC, EC) durch B‴, b‴ bezeichnet. Ebenſo werden die durch einen von C nach c geführten Bogen gebildeten Abſchnitte von C und c nach ihrer Lage in Bezug auf A und B reſp. durch C′, c′ und C″, c″ bezeichnet. Die Bogen ſelbſt, welche von A nach a, von B nach b, von C nach c gezogen werden, ſeien durch p′, p″, p‴ angedeutet. Schneiden ſich zwei ſolcher Bogen, wie AD (p′) und BE (p″) (Fig. 6.) in P, ſo werden die obern Abſchnitte, AP, BP, d. i. die zwiſchen dem Durchſchnittspunkte P und den zugehörigen Winkelpunkten enthaltenen Theile derſelben mit q; die untern Abſchnitte, wie PD, PE mit r bezeichnet, ſo daß durch q′, r′; q″, r″; q‴, r‴; reſp. die Abſchnitte von p′, p″, p‴ bezeichnet werden. — Von den Winkeln ADB, ADE, welche p′ mit a bildet, wird erſterer durch 𝔄″, letzterer, der nach C hinliegende mit 𝔄‴ bezeichnet; ſo wie unter 𝔅′, 𝔅‴; ℭ′ ℭ″ die durch p″, p‴ mit b, c gebildete Winkel gemeint ſein werden.

§. 45.

Wird von einem Winkelpunkte A eines ſphäriſchen Dreieckes (Fig. 6.) ein Perpendikel (AD) auf die gegenüber lie-

gende Seite a gefällt; ſo finden zwiſchen den dadurch entſtandenen Abſchnitten des Winkels A und der Seite a folgende Proportionen ſtatt:

1) $\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\text{tang}\, C}{\text{tang}\, B}$; d. h. die Sinus der Seitenabſchnitte umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel;

2) $\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b}$; die Koſinus derſelben wie die Koſinus der anliegenden Seiten.

3) $\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C}$; die Sinus der Winkelabſchnitte wie die Koſinus der nächſtliegenden Winkel;

4) $\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, c}$; die Koſinus derſelben umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

5) $\frac{\text{tang}\, a''}{\text{tang}\, a'''} = \frac{\text{tang}\, A''}{\text{tang}\, A'''}$; die Tangenten der Winkelabſchnitte ſind proportionirt den Tang. der gegenüberliegend. Seitenabſchnitte.

Beweis. 1) In dem rechtwinkligen Dreiecke ADB iſt

$$\text{tang}\, p' = \text{tang}\, B \,.\, \sin a'';$$

in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC iſt

$$\text{tang}\, p' = \text{tang}\, C \,.\, \sin a''';$$

daher $\text{tang}\, B \,.\, \sin a'' = \text{tang}\, C \sin a'''$, folglich

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\text{tang}\, C}{\text{tang}\, B}.$$

2) In dem genannten Dreiecke iſt

$$\cos p' = \frac{\cos c}{\cos a''} = \frac{\cos b}{\cos a'''},$$

daher die zweite Proportion.

3) In dem Dreieck ADB iſt $\cos p' = \frac{\cos B}{\sin A''}$; im Dreieck ADC iſt $\cos p' = \frac{\cos C}{\sin A'''}$; daher $\frac{\cos B}{\sin A''} = \frac{\cos C}{\sin A'''}$, woraus die dritte Proportion folgt.

4) In dem Dreiecke ADB iſt

$\text{tang}\, p' = \text{tang}\, c \cos A''$; im Dreieck ADC

$\text{tang}\, p' = \text{tang}\, b \cos A''';$

daher $\tang c \cos A'' = \tang b \cos A'''$ oder $\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\tang b}{\tang c}$.

5) Die fünfte Proportion folgt aus den vorhergehenden; einfacher aber aus

$$\sin p' = \frac{\tang a''}{\tang A''} = \frac{\tang a'''}{\tang A'''}.$$

Zuſ. 1. Für das Perpendikel ſelbſt erhält man aus denſelben Dreiecken

$$\sin p' = \sin B \sin c = \sin b \,.\, \sin C.$$

Setzt man für $\sin B$ den Werth $\frac{2g}{\sin a \sin c}$; ſo erhält man durch die Seiten ausgedrückt:

$$\sin p' = \frac{2g}{\sin a}.$$

Aus den Winkeln des Dreieckes findet ſich p', wenn man für $\sin c$ den Werth $\frac{2g}{\sin A \sin B}$ ſetzt; man erhält:

$$\sin p' = \frac{2G}{\sin A}.$$

Für die auf die Seiten b, c gefällten Perpendikel p'', p''', ergiebt ſich:

$$\sin p'' = \frac{2g}{\sin b} = \frac{2G}{\sin B};$$

$$\sin p''' = \frac{2g}{\sin c} = \frac{2G}{\sin C};$$

woraus $\sin p' : \sin p'' : \sin p''' = \frac{1}{\sin a} : \frac{1}{\sin b} : \frac{1}{\sin c};$

$$= \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$$ folgt.

Zuſ. 2. Während die Seiten und Winkel des Dreieckes nur poſitiv zu nehmen ſind, können doch die Abſchnitte a'', a''', A'', A''' negative Werthe erhalten. Denn denkt man ſich die Lage der Spitze A veränderlich, ſo kann das Perpendikel AD der Seite AC immer näher kommen, wobei a''' und A''' abnehmen. Fällt AD mit AC zuſammen,

ſo wird $a''' = o$; $A''' = o$. Geht AD über AC hinaus, ſo nehmen a''' und A''' wieder zu, jedoch nach entgegengeſetzter Richtung. Demnach nehmen a''', A''' in dieſem Falle die entgegengeſetzten Werthe der vorigen an. Nimmt man die Abſchnitte als poſitive, wenn ſie innerhalb des Dreieckes liegen, ſo ſind die außerhalb liegenden negativ; umgekehrt iſt von negativen Werthen derſelben auf deren Lage außerhalb des Dreieckes zu ſchließen. — Daß von den Abſchnitten a'', a''', ſo wie von A'', A''' nur einer, nicht beide zugleich, negativ werden kann, iſt an ſich klar.

Nach g. S. §. 39. fällt das Perpendikel innerhalb des Dreieckes, wenn die an der Grundſeite liegenden Winkel gleichartig; außerhalb, wenn dieſe ungleichartig ſind. Daſſelbe geht aus den Formeln

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\tang C}{\tang B};$$

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C} \quad \text{hervor.}$$

Daß von den Abſchnitten a'', a''' derjenige, welcher an dem, dem Rechten näheren Winkel liegt, immer $< \frac{1}{2}\pi$ ſein muß, ſo wie der gegenüber liegende Winkelabſchnitt, iſt g. S. §. 39. Zuſ. 2. bemerkt worden. Hier läßt ſich dies ſehr einfach nachweiſen. Denn es iſt:

$$\cos a''' = \frac{\cos b}{\cos p}; \quad \text{und} \quad \cos p = \frac{\cos B}{\sin A''};$$

daher $$\cos a''' = \frac{\cos b \cdot \sin A''}{\cos B}.$$

Iſt nun C dem Rechten näher als B, ſo ſind B und b gleichartig; daher $\cos a'''$ poſitiv; mithin $a''' < \frac{1}{2}\pi$.

Zuſ. 3. Merkwürdig iſt der Fall, wenn der Winkel A dem Supplemente von a gleich iſt. Es iſt alsdann A''' das Komplement von a''; A'' das Komplement von a'''.

Denn iſt $A = \pi - a$; ſo iſt $\sin A = \sin a$; alſo auch $\sin B = \sin b$; $\sin C = \sin c$; mithin, da wenigſtens zwei

Seiten mit den gegenüber liegenden Winkeln gleichartig ſein müſſen,

$$B=b;\ \ C=c.$$

Nun iſt $\tang a'''=\cos C \tang b$ (§. 16.); oder, da $C=c$ iſt,
$=\cos c \tang b$,
und $\cot g A''=\cos c \tang B$ (§. 16.); oder, da $B=b$,
$=\cos c \tang b$,
folglich $\tang a'''=\cot g A''$ oder $A''=\frac{1}{2}\pi-a'''$.

Hieraus und aus $A=\pi-a$ folgt, daß auch
$A'''=\frac{1}{2}\pi-a''$ iſt.

Wenn umgekehrt $A''=\frac{1}{2}\pi-a'''$ iſt, ſo iſt auch
$A'''=\frac{1}{2}\pi-a''$; $A=\pi-a$; $B=b$; $C=c$.

Denn es iſt:

$$\tang A'''=\frac{\tang a'''}{\sin p'}\ \text{(§. 16.) und}$$

$$\tang a''=\tang A''\sin p';$$

oder, da $A''=\frac{1}{2}\pi-a'''$ vorausgeſetzt wird,

$$\tang a''=\cot g a'''\ \sin p'=\frac{\sin p'}{\tang a'''}.$$

Daher $\tang A'''=\frac{1}{\tang a''}$, folglich $A'''=\frac{1}{2}\pi-a''$;
mithin auch $A=\pi-a$; $B=b$; $C=c$.

Zuſ. 4. Mit Hülfe des Perpendikels läßt ſich die Auflöſung ſchiefwinkliger Dreiecke auf die Auflöſung rechtwinkliger zurückführen, indem man durch ein Perpendikel das zu berechnende Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt, von denen das eine zwei der gegebenen Stücke enthält, was freilich in den beiden Fällen, wenn drei Seiten oder drei Winkel gegeben ſind, nicht möglich iſt.

1) Sind zwei Seiten a, b, und der eingeſchloſſene Winkel C gegeben, ſo fälle man von A (oder auch von B) das Perpendikel AD. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADC, wo die Hypotenuſe AC (b) und der anliegende Winkel C bekannt iſt, hat man:

1) $\sin p \quad = \sin b \sin C.$
2) $\operatorname{tang} a''' = \operatorname{tang} b \cos C.$
3) $\operatorname{cotg} A''' = \cos b \operatorname{tang} C.$

Nachdem hierdurch p', a''', A''' beſtimmt ſind, erhält man in dem Dreiecke ADB

1) $a'' \quad = a - a'''$;
2) $\cos c \quad = \cos a'' \cos p$;
3) $\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} p}{\sin a''}$;
4) $\operatorname{tang} A'' = \frac{\operatorname{tang} a''}{\sin p}$ und $A = A'' + A'''$.

2) Sind zwei Winkel A, B und die anliegende Seite c gegeben, ſo fälle man von A (oder B) das Perpendikel AD. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADB iſt dann wieder die Hypotenuſe c und der anliegende Winkel B gegeben; woraus ſich wie oben die übrigen Stücke dieſes Dreieckes und mittelſt derſelben die des andern Dreieckes ADC finden laſſen.

Derſelbe Fall findet ſtatt, wenn zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel, oder wenn zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben ſind.

3) Wenn drei Seiten gegeben ſind, fälle man von einer beliebigen Ecke, etwa A, ein Perpendikel. Aus

$$\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b} \text{ folgt}$$

$$\frac{\cos a''' - \cos a''}{\cos a''' + \cos a''} = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b + \cos c}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a''+a''')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a''-a''') = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b).$$

Da $a''+a'''=a$ iſt, ſo erhält man hieraus

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a''-a''') = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c+b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-b)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a}.$$

Man erhält hieraus die Differenz $a''-a'''$. Die Summe $a''+a'''$ iſt gegeben; daher finden ſich aus $(a''+a''')\pm(a''-a''')$ beide Abſchnitte a'', a'''. Hat man dieſe, ſo iſt in jedem der

Dreiecke ADB, ADC die Hypotenuſe und eine Kathete bekannt, aus denen ſich die Winkel finden.

4) Sind die Winkel gegeben, ſo erhält man, nachdem das Perpendikel p' gefällt iſt, aus der Proportion

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C} \text{ die Gleichung}$$

$$\frac{\sin A'' - \sin A'''}{\sin A'' + \sin A'''} = \frac{\cos B - \cos C}{\cos B + \cos C}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(A''-A''')}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(A''+A''')} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(C+B)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(C-B);$$

daher $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(A''-A''') = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}A \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(C+B)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(C-B)$. Hieraus findet ſich A'' und A'''. Man hat ſodann in jedem der Dreiecke ADB, ADC zwei Winkel, aus denen die Seiten ſich finden laſſen.

Wo hier Sinus vorkommen, läßt ſich die Zweideutigkeit derſelben nach den bereits bekannten Regeln entſcheiden. Auch die Koſinus der Winkel- und Seitenabſchnitte erzeugen hierbei Zweideutigkeit, indem zu einem und demſelben Koſinus ein poſitiver und ein negativer Winkel oder Bogen genommen werden kann. Dieſe Zweideutigkeit entſcheidet die Lage des Perpendikels, die aus den an der Grundſeite liegenden Winkeln oder Seiten erkannt wird. In den ſogenannten zweideutigen Fällen (wenn zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel oder zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben ſind), iſt die nöthige Entſcheidung g. S. §. 39, Zuſ. 3. zu ſuchen.

Anmerk. Die oben §. 19. u. f. gebrauchten Hülfsgrößen zur Zuſammenziehung der allgemeinen Formeln in Faktoren ſind zum Theil nichts anderes, als die durch Perpendikel erzeugten Seiten- oder Winkelabſchnitte, oder die Perpendikel ſelbſt. Wenigſtens laſſen ſich beide ganz in Uebereinſtimmung bringen.

§. 46.

Lehrſatz. Zwiſchen den durch zwei Perpendikel — das eine von A, das andere von B aus-

gehend — gebildeten Seiten- und Winkelabſchnitten finden folgende Verhältniſſe ſtatt:

1) $\frac{\tang A''}{\tang B'} = \frac{\tang A}{\tang B}$; die Tangenten der benachbarten Winkelabſchnitte wie die Tangenten der ganzen Winkel.

2) $\frac{\tang A'''}{\tang B'''} = \frac{\cos a}{\cos b}$; die Tangenten der getrennten Winkelabſchnitte umgekehrt wie die Koſinus der anliegenden Seiten.

3) $\frac{\tang a'''}{\tang b'''} = \frac{\tang b}{\tang a}$; die Tangenten der benachbarten Seitenabſchn. umgekehrt wie die Tang. der ganzen Seiten.

4) $\frac{\tang a''}{\tang b'} = \frac{\cos B}{\cos A}$; die Tang. der getrennten Seitenabſchn. wie die Koſinus der anliegenden Winkel.

5) $\frac{\tang p'}{\tang p''} = \frac{\sin a'''}{\sin b''}$; die Tangenten der Perpendikel wie die Sinus der von denſelben eingeſchloſſenen Seitenabſchnitte.

6) $\frac{\cos p'}{\cos p''} = \frac{\sin B'''}{\sin A'''}$; die Koſinus der Perpendikel wie die Sinus der von denſelben eingeſchl. Winkelabſchnitte.

Beweis. 1) In den rechtwinkligen Dreiecken ADB und AEB, welche die Hypotenuſe c gemein haben, iſt

$\tang B \tang A'' \cos c = 1$; und

$\tang A \tang B' \cos c = 1$; (§. 16.)

daher $\tang A \tang B' = \tang B \tang A''$,

oder $\frac{\tang A''}{\tang B'} = \frac{\tang A}{\tang B}$.

2) In den Dreiecken ADC, AEC, denen der Winkel C gemein iſt, iſt:

$\tang A''' \tang C \cos b = 1$;

$\tang B''' \tang C \cos a = 1$; (§. 16.)

daher $\tang A''' \cos b = \tang B''' \cos a$;

oder $\frac{\tang A'''}{\tang B'''} = \frac{\cos a}{\cos b}$.

3) In denſelben Dreiecken iſt:

$$\cos C = \frac{\tang a'''}{\tang b} = \frac{\tang b'''}{\tang a},$$

daher $\frac{\tang a'''}{\tang b'''} = \frac{\tang b}{\tang a}$.

4) In den Dreiecken ADB, AEB iſt:

$$\tang c = \frac{\tang a''}{\cos B} = \frac{\tang b'}{\cos A},$$

alſo . . . . $\frac{\tang a''}{\tang b'} = \frac{\cos B}{\cos A}$.

5) In den Dreiecken ADC, BEC iſt:

$$\tang C = \frac{\tang p'}{\sin a'''} = \frac{\tang p''}{\sin b'''},$$

daher . . . . $\frac{\tang p'}{\tang p''} = \frac{\sin a'''}{\sin b'''}$.

6) In demſelben Dreiecke iſt:

$\cos C = \cos p' \sin A''' = \cos p'' \sin B'''$; daher

$$\frac{\cos p'}{\cos p''} = \frac{\sin B'''}{\sin A'''}.$$

Zuſatz. Zwiſchen den Abſchnitten der Perpendikel, q', r', q'', r'' findet die Relation

$\tang q' \tang r' = \tang q'' \tang r''$ oder

$\frac{\tang q'}{\tang q''} = \frac{\tang r''}{\tang r'}$ ſtatt.

Denn in dem Dreiecke BDP iſt

$$\cos BPD = \frac{\tang PD}{\tang BP} = \frac{\tang r'}{\tang q''}.$$

In dem Dreiecke APE iſt

$$\cos APE = \frac{\tang PE}{\tang AP} = \frac{\tang r''}{\tang q'}.$$

Da BPD = APE iſt, ſo folgt $\frac{\tang r'}{\tang q''} = \frac{\tang r''}{\tang q'}$,

oder $\tang q' \tang r' = \tang q'' \tang r''$.

§. 47.

Lehrſatz. Die von den Winkelſpitzen eines ſphäriſchen Dreieckes auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel ſchneiden ſich in einem und demſelben Punkte.

Beweis. In dem Dreiecke ABC (Fig. 8.) ſeien die Perpendikel AD, BE (p', p'') gezogen, die ſich in P ſchneiden. Ginge das dritte Perpendikel CF nicht durch P, ſo trifft das von P auf AB gefällte Perpendikel PG in einem von F verſchiedenen Punkte G dieſelbe Seite. Die durch das Perpendikel CF gebildeten Seitenabſchnitte AF, BF geben nach §. 45. die Proportion

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A}.$$

In dem Dreiecke APB hat man nach demſelben Satze

$$\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\operatorname{tang} B'}{\operatorname{tang} A''}.$$

Nach §. 46. Num. 1. iſt $\frac{\operatorname{tang} B'}{\operatorname{tang} A''} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A}$; alſo iſt

$$\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A},$$

folglich müßte $\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\sin AF}{\sin BF}$ ſein, was nicht möglich iſt, wofern F und G nicht zuſammenfallen. Denn bezeichnet man GB mit x; FB mit x'; ſo iſt $AG = c - x$; $AF = c - x'$. Iſt nun

$$\frac{\sin(c - x)}{\sin x} = \frac{\sin(c - x')}{\sin x'},\ \text{oder}$$

$$\frac{\sin c \cos x - \cos c \sin x}{\sin x} = \frac{\sin c \cos x' - \cos c \sin x'}{\sin x'};$$

oder $\sin c \operatorname{cotg} x - \cos c = \sin c \operatorname{cotg} x' - \cos c$;

ſo müßte $\sin c \operatorname{cotg} x = \sin c \operatorname{cotg} x'$,

alſo $x = x'$, d. i. $BG = BF$ ſein; was der Annahme widerſpricht. Daher muß das dritte Perpendikel auch durch P gehen.

Zuſ. 1. Daher iſt

$$\tang q' \tang r' = \tang q'' \tang r'' = \tang q''' \tang r'''.$$

Zuſ. 2. Die Perpendikel zweier Polardreiecke ſchneiden ſich alle in einem Punkte. Denn iſt A'B'C' (Fig. 9.) das Polardreieck von ABC, ſo ſteht der von A' durch A gezogene Bogen in D, D' ſenkrecht auf den Seiten BC, B'C', deren Pole reſp. A', A ſind. Es liegen alſo die Perpendikel der korreſpondirenden Spitzen A, A' in einem und demſelben Hauptkreiſe. Daſſelbe gilt von den Perpendikeln der Spitzen B, B' und C, C', daher iſt die Behauptung klar.

Zuſ. 3. Von den korreſpondirenden Perpendikeln zweier Polardreiecke iſt jedes das Supplement des andern. Denn es iſt $A'D = \frac{1}{2}\pi$; $AD' = \frac{1}{2}\pi$; daher:

$$\pi = A'D + AD' = A'A + AD + AD'$$
$$= AD + A'D'.$$

§. 48.

Lehrſatz. Wenn in einem rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuſe gefällt wird, ſo iſt:

1) der Sinus des Perpendikels die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hypotenuſenabſchnitte;

2) die Tangente jeder Kathete die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hypotenuſe und des anliegenden Abſchnittes derſelben.

Beweis. 1) In dem rechtwinkligen Dreiecke BAC (Fig. 7.) iſt:

$$\sin p' = \frac{\tang a''}{\tang A''} = \frac{\tang a'''}{\tang A'''}$$

daher $\sin^2 p' = \frac{\tang a'' \tang a'''}{\tang A'' \tang A'''}$.

Iſt nun A der rechte Winkel, ſo iſt $A'' + A''' = A = \frac{1}{2}\pi$; folglich $\tang A'' \tang A''' = 1$; daher $\sin^2 p = \tang a''. \tang a'''$.

2) In dem rechtwinkligen Dreiecke ADC iſt:

$$\cos C = \frac{\tang a'''}{\tang b};$$

in dem ganzen Dreiecke ABC, deſſen Winkel A der rechte iſt, iſt:

$$\cos C = \frac{\tang b}{\tang a};$$

daraus folgt $\frac{\tang a'''}{\tang b} = \frac{\tang b}{\tang a}$ oder

$$\tang^2 b = \tang a \tang a'''.$$

Eben ſo erhält man aus den Dreiecken ADB, ABC

$$\cos B = \frac{\tang a''}{\tang c} = \frac{\tang c}{\tang a};$$ woraus

$$\tang^2 c = \tang a \tang a''$$ folgt.

Zuſ. 1. Die Quadrate der Tangenten der Katheten verhalten ſich wie die Tangenten der anliegenden Hypotenuſenabſchnitte. Denn aus

$\tang^2 b = \tang a \tang a'''$ und $\tang^2 c = \tang a \tang a''$

folgt: $$\frac{\tang^2 b}{\tang^2 c} = \frac{\tang a'''}{\tang a''}.$$

Zuſ. 2. Auch iſt das Produkt der Sinus der Katheten gleich dem Produkte der Sinus der Hypotenuſe und des Perpendikels. Denn aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC, ABC erhält man:

$$\sin C = \frac{\sin p}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

woraus: $\sin b \sin c = \sin a \,.\, \sin p'$ folgt.

§. 49.

Lehrſatz. Wenn von einer Spitze (A) eines ſphäriſchen Dreieckes nach einem beliebigen Punkte der gegenüber liegenden Seite (a) ein Bogen (p′) gezogen wird, ſo finden folgende Gleichungen ſtatt:

1) $\sin a \cos p' = \sin a'' \cos b + \sin a''' \cos c;$

2) $\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c;$

3) $\sin a \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C;$

4) $\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos C;$

5) $\cos \mathfrak{A}''' \sin a \sin p' = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c;$

6) $\dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A}{\sin p'} = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c;$

7) $\dfrac{\sin A'' \,.\, \sin a'''}{\sin A''' \,.\, \sin a''} = \dfrac{\sin b}{\sin c}$

Beweis. 1) Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 10.) der Bogen AD beliebig gezogen, ſo iſt in dem dadurch entſtandenen Dreiecke ABD

$$\cos B = \frac{\cos p' - \cos a'' \cos c}{\sin a'' \sin c}; \text{ (§. 12.)}$$

in dem ganzen Dreiecke ABC iſt:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c};$$

daher iſt $\dfrac{\cos p' - \cos a'' \cos c}{\sin a''} = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a}$

oder $\sin a (\cos p' - \cos a'' \cos c) = \sin a'' (\cos b - \cos a \cos c)$

daher:

$$\sin a \cos p' = \sin a'' \cos b + (\sin a \cos a'' - \cos a \sin a'') \cos c;$$
$$= \sin a'' \cos b + \sin (a - a'') \cos c;$$
$$= \sin a'' \cos b + \sin a''' \cos c;$$

2) In denſelben Dreiecken iſt nach der dritten Hauptgleichung (§. 14.)

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} p' \sin c - \cos A'' \cos c}{\sin A''}$$

und $\operatorname{cotg} B = \dfrac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos A \cos c}{\sin A};$

hieraus folgt:

$\sin A (\operatorname{cotg} p' \sin c - \cos A'' \cos c) = \sin A'' (\operatorname{cotg} b \sin c - \cos A \cos c);$

und, wenn alles mit $\sin c$ dividirt wird

$\sin A (\operatorname{cotg} p' - \cos A'' \operatorname{cotg} c) = \sin A'' (\operatorname{cotg} b - \cos A \operatorname{cotg} c)$

daher iſt:

$\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + (\sin A \cos A'' - \cos A \sin A'') \operatorname{cotg} c;$

$$= \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin(A - A'') \operatorname{cotg} c,$$
$$= \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c;$$

3) Aus dem Dreiecke ADC erhält man

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a'''}{\sin a'''}; \text{ (§. 14.)}$$

aus dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a''}{\sin a''};$$

daher ist:

$$\frac{\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a'''}{\sin a'''} = \frac{\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a''}{\sin a''}$$

oder $\sin a''(\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a''')$

$$= \sin a'''(\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a'');$$

daher $\sin a'' \cos a''' \cos \mathfrak{A}''' - \sin a''' \cos a'' \cos \mathfrak{A}''$

$$= -\sin a'' \operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \sin a''' \operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'';$$

oder, wenn man für $\mathfrak{A}''$ ſubſtituirt $(\pi - \mathfrak{A}''')$,

$(\sin a'' \cos a''' + \sin a''' \cos a'') \cos \mathfrak{A}'''$

$$= (\sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C) \sin \mathfrak{A}''';$$

daher:

$$\sin(a'' + a''') \cos \mathfrak{A}''' = (\sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C) \sin \mathfrak{A}''';$$

endlich nach Diviſion mit $\sin \mathfrak{A}'''$

$$\sin a . \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C.$$

4) In den Dreiecken ADC und ABC iſt:

$$\cos b = \frac{\cos \mathfrak{A}''' + \cos A''' \cos C}{\sin A''' \sin C}; \text{ und}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}; \text{ daher iſt}$$

$$\sin A (\cos \mathfrak{A}''' + \cos A''' \cos C) = \sin A''' (\cos B + \cos A \cos C);$$

oder

$$\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin A''' \cos B + \sin A''' \cos A \cos C - \sin A \cos A''' \cos C;$$
$$= \sin A''' \cos B - \sin(A - A''') \cos C;$$
$$= \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos C;$$

5) in den Dreiecken ADC und ADB iſt:

$$\cos b = \cos \mathfrak{A}''' \sin a''' \sin p' + \cos a''' \cos p'; \ (\varphi)$$
$$\cos c = \cos \mathfrak{A}'' \sin a'' \sin p' + \cos a'' \cos p';$$

$$= -\cos\mathfrak{A}''' \sin a'' \sin p' + \cos a'' \cos p'; \ (\psi)$$

Multiplizirt man die Gleichung (φ) mit $\cos a''$, (ψ) mit $\cos a'''$ und zieht dann dieſe von jener ab, ſo erhält man

$$\cos\mathfrak{A}''' \sin p' (\sin a'' \cos a''' + \cos a'' \sin a''')$$
$$= \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c; \text{ daher}$$
$$\cos\mathfrak{A}''' \sin a \sin p' = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c.$$

6) In dem Dreiecke ADC iſt

$$\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' \sin A''' = \cos A''' \cos p'; \ (\varphi)$$

in dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} c \sin p' - \operatorname{cotg}\mathfrak{A}'' \sin A'' = \cos A'' \cos p';$$

oder $\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' \sin A'' = \cos A'' \cos p'$; ($\psi$)

Multiplizirt man (φ) mit $\cos A''$, (ψ) mit $\cos A'''$, ſo wird

$$\cos A''(\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' \sin A''')$$
$$= \cos A'''(\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' \sin A'');$$

woraus $\operatorname{cotg}\mathfrak{A}'''(\sin A'' \cos A''' + \cos A'' \sin A''')$

$$= \sin p'(\cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c)$$

oder $\dfrac{\operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' \sin A}{\sin p'} = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c$ folgt.

7) Aus den Dreiecken ABD und ACD erhält man

$$\sin\mathfrak{A}'' = \frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} \quad \text{und}$$
$$\sin\mathfrak{A}''' = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''};$$

Da $\sin\mathfrak{A}'' = \sin\mathfrak{A}'''$ iſt, ſo folgt hieraus:

$$\frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''} \quad \text{oder}$$
$$\frac{\sin A''.\sin a'''}{\sin A'''.\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Anmerk. Wird der Bogen aus der Spitze B nach b gezogen, ſo iſt in obigen Gleichungen a, A, $\mathfrak{A}$ gegen b, B, $\mathfrak{B}$ und die Marke (') gegen ('') zu vertauſchen. Geht der Bogen von C nach c, ſo verwandelt ſich a, A, $\mathfrak{A}$, ('), in c, C, $\mathfrak{C}$, (''') und umgekehrt.

Zuſ. In den Gleichungen 3, 4, 5, 6, ſind die Pro-

$$=\sin A''\operatorname{cotg} b+\sin(A-A'')\operatorname{cotg} c,$$
$$=\sin A''\operatorname{cotg} b+\sin A'''\operatorname{cotg} c;$$

3) Aus dem Dreiecke ADC erhält man

$$\operatorname{cotg} p'=\frac{\operatorname{cotg} C\sin\mathfrak{A}'''+\cos\mathfrak{A}'''\cos a'''}{\sin a'''};\ (\S.\ 14.)$$

aus dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} p'=\frac{\operatorname{cotg} B\sin\mathfrak{A}''+\cos\mathfrak{A}''\cos a''}{\sin a''};$$

daher iſt:

$$\frac{\operatorname{cotg} C\sin\mathfrak{A}'''+\cos\mathfrak{A}'''\cos a'''}{\sin a'''}=\frac{\operatorname{cotg} B\sin\mathfrak{A}''+\cos\mathfrak{A}''\cos a''}{\sin a''}$$

oder $\sin a''(\operatorname{cotg} C\sin\mathfrak{A}'''+\cos\mathfrak{A}'''\cos a''')$
$$=\sin a'''(\operatorname{cotg} B\sin\mathfrak{A}''+\cos\mathfrak{A}''\cos a'');$$

daher $\sin a''\cos a'''\cos\mathfrak{A}'''-\sin a'''\cos a''\cos\mathfrak{A}''$
$$=-\sin a''\operatorname{cotg} C\sin\mathfrak{A}'''+\sin a'''\operatorname{cotg} B\sin\mathfrak{A}'';$$

oder, wenn man für $\mathfrak{A}''$ ſubſtituirt $(\pi-\mathfrak{A}''')$,
$(\sin a''\cos a'''+\sin a'''\cos a'')\cos\mathfrak{A}'''$
$$=(\sin a'''\operatorname{cotg} B-\sin a''\operatorname{cotg} C)\sin\mathfrak{A}''';$$

daher:
$\sin(a''+a''')\cos\mathfrak{A}'''=(\sin a'''\operatorname{cotg} B-\sin a''\operatorname{cotg} C)\sin\mathfrak{A}''';$
endlich nach Diviſion mit $\sin\mathfrak{A}'''$
$$\sin a.\operatorname{cotg}\mathfrak{A}'''=\sin a'''\operatorname{cotg} B-\sin a''\operatorname{cotg} C.$$

4) In den Dreiecken ADC und ABC iſt:

$$\cos b=\frac{\cos\mathfrak{A}'''+\cos A'''\cos C}{\sin A'''\sin C};\ \text{und}$$

$$\cos b=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin C};\ \text{daher iſt}$$

$\sin A(\cos\mathfrak{A}'''+\cos A'''\cos C)=\sin A'''(\cos B+\cos A\cos C);$
oder
$\sin A\cos\mathfrak{A}'''=\sin A'''\cos B+\sin A'''\cos A\cos C-\sin A\cos A'''\cos C;$
$$=\sin A'''\cos B-\sin(A-A''')\cos C;$$
$$=\sin A'''\cos B-\sin A''\cos C;$$

5) in den Dreiecken ADC und ADB iſt:
$\cos b=\cos\mathfrak{A}'''\sin a'''\sin p'+\cos a'''\cos p';\ (\varphi)$
$\cos c=\cos\mathfrak{A}''\sin a''\sin p'+\cos a''\cos p';$

$$= -\cos \mathfrak{A}''' \sin a'' \sin p' + \cos a'' \cos p'; \ (\psi)$$

Multiplizirt man die Gleichung (φ) mit $\cos a''$, (ψ) mit $\cos a'''$ und zieht dann dieſe von jener ab, ſo erhält man

$$\cos \mathfrak{A}''' \sin p' (\sin a'' \cos a''' + \cos a'' \sin a''')$$
$$= \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c; \text{ daher}$$
$$\cos \mathfrak{A}''' \sin a \sin p' = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c.$$

6) In dem Dreiecke ADC iſt

$$\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A''' = \cos A''' \cos p'; \ (\varphi)$$

in dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} c \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}'' \sin A'' = \cos A'' \cos p';$$

oder $\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A'' = \cos A'' \cos p'; \ (\psi)$

Multiplizirt man (φ) mit $\cos A''$, (ψ) mit $\cos A'''$, ſo wird

$$\cos A'' (\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A''')$$
$$= \cos A''' (\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A'');$$

woraus $\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' (\sin A'' \cos A''' + \cos A'' \sin A''')$

$$= \sin p' (\cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c)$$

oder $\dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A}{\sin p'} = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c$ folgt.

7) Aus den Dreiecken ABD und ACD erhält man

$$\sin \mathfrak{A}'' = \frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} \quad \text{und}$$
$$\sin \mathfrak{A}''' = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''};$$

Da $\sin \mathfrak{A}'' = \sin \mathfrak{A}'''$ iſt, ſo folgt hieraus:

$$\frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''} \quad \text{oder}$$
$$\frac{\sin A''. \sin a'''}{\sin A'''. \sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Anmerk. Wird der Bogen aus der Spitze B nach b gezogen, ſo iſt in obigen Gleichungen a, A, 𝔄 gegen b, B, 𝔅 und die Marke (′) gegen (″) zu vertauſchen. Geht der Bogen von C nach c, ſo verwandelt ſich a, A, 𝔄, (′), in c, C, ℭ, (‴) und umgekehrt.

Zuſ. In den Gleichungen 3, 4, 5, 6, ſind die Pro-

portionen des §. 45. enthalten. Denn iſt p' ſenkrecht auf a, ſo iſt $\mathfrak{A}''' = \frac{1}{2}\pi$; alſo $\cos \mathfrak{A}''' = 0$; $\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = 0$.

Die Gleichung (3) giebt dann

$$0 = \sin a'' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C; \text{ woraus}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} B} \text{ folgt.}$$

In der vierten Gleichung wird dann

$$0 = \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos B; \text{ oder}$$

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C};$$

Aus der fünften erhält man

$$0 = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c; \text{ oder}$$

$$\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b};$$

Aus der ſechſten:

$$0 = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c, \text{ oder}$$

$$\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\operatorname{cotg} b} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}.$$

§. 50.

Wird der Winkel A durch den Bogen p' halbirt, ſo iſt in obigen Gleichungen $A'' = A''' = \frac{1}{2}A$. Man erhält dann:

1) aus $\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c$; (2.)

$$\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} b + \sin \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} c; \text{ oder}$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} p' = \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c.$$

Für das halbirende p' ergiebt ſich daher der einfache Ausdruck

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c}{2 \cos \frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{\sin (b + c)}{2 \sin b \sin c \,.\, \cos \frac{1}{2}A}.$$

2) Die Gleichung No. 4 giebt in dieſem Falle:

$$\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2} A (\cos B - \cos C); \text{ woraus}$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \mathfrak{A}''' = \cos B - \cos C$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (C + B) \sin \tfrac{1}{2} (C - B) \text{ oder}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \cos \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2} (C + B) \sin \tfrac{1}{2} (C - B) \text{ folgt.}$$

Für den Winkel $\mathfrak{A}'''$ erhält man alſo den Ausdruck

$$\cos \mathfrak{A}''' = \frac{\cos B - \cos C}{2 \cos \frac{1}{2} A} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C+B) \sin \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2} A}; \ (\varphi)$$

Nach §. 34, (2.) iſt $\frac{\cos A - \cos C}{1 + \cos A} = \frac{\sin (c-b)}{\sin a}$; daraus ergiebt ſich

$$\cos \mathfrak{A}''' = \frac{\sin (c-b)}{\sin a} \cdot \cos \tfrac{1}{2} A. \ (\psi)$$

Aus beiden Formeln, (φ) und (ψ), geht hervor, daß von den Winkeln $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, welche der den Winkel A halbirende Bogen p' an der Grundſeite a bildet, der der kleineren Seite b, oder dem größeren Winkel C, zugekehrte $\mathfrak{A}'''$ ein ſpitzer Winkel iſt.

3) Die ſechſte Gleichung vereinfacht ſich in folgende:

$$\frac{\operatorname{cotg} \mathfrak{A}'''}{\sin p'} = \frac{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} c}{2 \sin \frac{1}{2} A}$$

4) Aus der ſiebenten erhält man die Proportion:

$$\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Wenn alſo aus einem Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes nach der gegenüber liegenden Seite ein Bogen gezogen wird, der jenen Winkel halbirt, ſo verhalten ſich die Sinus der ungetheilten Seiten wie die Sinus der anliegenden Abſchnitte der getheilten Seite — eine Analogie zu dem planimetriſchen Satze:

$$\frac{a'''}{a''} = \frac{b}{c}.$$

Zuſ. Für den Bogen p' erhält man in dieſem Falle noch einen bemerkenswerthen Ausdruck mit Hülfe der Neperſchen Formeln. In dem Dreiecke ABD iſt nämlich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} p' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(c - a'') \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' + A'')}{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' - A'')}; \ (\text{§. 33, II.}).$$

in dem Dreiecke ACD iſt:

$$\tang \tfrac{1}{2} p' = \tang \tfrac{1}{2}(b + a''') . \frac{\cos \frac{1}{2}(\mathfrak{A}''' + A''')}{\cos \frac{1}{2}(\mathfrak{A}''' - A''')}; \text{ (§. 33, I.)}.$$

$$= \tang \tfrac{1}{2}(b + a''') \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' - A''')}{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' + A''')} .$$

Multiplizirt man beide Gleichungen, ſo erhält man:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} p' = \tang \tfrac{1}{2}(c - a'') \tang \tfrac{1}{2}(b + a''') \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' + A'') \sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' - A''')}{\sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' + A''') \sin \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' - A'')};$$

Iſt nun $A''_{\cdot} = A'''_{\cdot\cdot}$ ſo vereinfacht ſich dieſer Ausdruck in folgenden:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} p' = \tang \tfrac{1}{2}(c - a'') \tang \tfrac{1}{2}(b + a''').$$

Da die Seiten b, $a''_{\cdot}$ und c, $a'''_{\cdot\cdot}$ auf einerlei Art um p' liegen, ſo wird auch

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} p' = \tang \tfrac{1}{2}(c + a'') \tang \tfrac{1}{2}(b - a''') \text{ ſein,}$$

was auch aus

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(c - a'')}{\tang \frac{1}{2}(c + a'')} = \frac{\tang \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' - A'')}{\tang \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'' + A'')} \text{ (§. 33.)}$$

$$= \frac{\tang \frac{1}{2}(\mathfrak{A}''' - A''')}{\tang \frac{1}{2}(\mathfrak{A}''' + A''')} \text{ (weil } A'''_{\cdot\cdot} = A'')$$

$$= \frac{\tang \frac{1}{2}(b - a''')}{\tang \frac{1}{2}(b + a''')} \text{ (§. 33.)}$$

hervorgeht, einfacher aber aus obiger Proportion $\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$

folgt. Denn man erhält daraus ſogleich $\frac{\sin b - \sin a'''}{\sin b + \sin a'''}$

$= \frac{\sin c - \sin a''}{\sin c - \sin a''}$; oder $\frac{\tang \frac{1}{2}(b - a''')}{\tang \frac{1}{2}(b + a''')} = \frac{\tang \frac{1}{2}(c - a'')}{\tang \frac{1}{2}(c + a'')}$ und hieraus

$$\tang \tfrac{1}{2}(c - a'') \tang \tfrac{1}{2}(b + a''') = \tang \tfrac{1}{2}(b - a''') \tang \tfrac{1}{2}(c + a'').$$

§. 51.

Wird der Bogen p' nach dem Mittelpunkte der Seite a gezogen, ſo wird in den Gleichungen des §. 49. $a'' = a'''$. Es ergiebt ſich dann

1) aus No. 7.

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Wenn alſo aus einem Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes nach der Mitte der gegenüber liegenden Seite ein Bogen gezogen wird, ſo verhalten ſich die Sinus der Abſchnitte des getheilten Winkels wie die Sinus der ungetheilten Winkel.

2) Aus No. 1. erhält man

$$\sin a \cos p' = \sin \tfrac{1}{2} a (\cos b + \cos c)$$

daher

$$\cos p' = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{1}{2} a}$$
$$= \frac{\sin(B+C) \cos \frac{1}{2} a}{\sin A}; \text{ (§. 34, 3.)}$$

3) Aus No. 3. ergiebt ſich

$$\sin a \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2} a (\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C); \text{ daher}$$

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \frac{\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C}{2 \cos \frac{1}{2} a}$$
$$= \frac{\sin(C-B)}{2 \sin C \sin B \cos \frac{1}{2} a};$$

Iſt hier $C > B$, ſo iſt $\operatorname{cotg} \mathfrak{A}'''$ poſitiv, alſo $\mathfrak{A}'''$ ein ſpitzer Winkel; iſt umgekehrt $\mathfrak{A}''' < \frac{1}{2}\pi$, ſo muß $C > B$, alſo auch $c > b$ ſeyn. Von den Winkeln alſo, welche durch den aus der Spitze eines ſphäriſchen Dreieckes nach der Mitte der Grundſeite gezogenen Bogen an der Grundſeite gebildet werden, ſteht der kleinere einer kleineren Seite gegenüber, und umgekehrt.

Zuſ. 1. Dieſen von der Spitze nach der Mitte der Grundſeite gehenden Bogen kann man die Achſe des Dreieckes nennen, von deren größerer oder geringerer Neigung gegen die Grundſeite die mehr oder weniger ſchiefe Lage des Dreieckes abhängt. Errichtet man in dem Mittelpunkte D der Grundſeite BC ein Perpendikel DE (Fig. 10.), ſo iſt das Dreieck um ſo ſchiefer, je größer der Winkel EDA — das Komplement von $\mathfrak{A}'''$ — iſt. Es kann daher dieſer zwiſchen der Achſe AD und dem Perpendikel ED enthaltene Winkel

die Schiefe des Dreieckes genannt werden. Wird dieſelbe mit S bezeichnet, ſo iſt $S = \frac{1}{2}\pi - \mathfrak{A}'''$, daher:

$$\tang S = \frac{\cotg B - \cotg C}{2\cos\frac{1}{2}a}$$
$$= \frac{\sin(C-B)}{2 . \sin C . \sin B . \cos\frac{1}{2}a}. \quad (\varphi)$$

Iſt $C > B$, ſo iſt S poſitiv, d. h. das Dreieck iſt nach C oder b hin geneigt. Iſt $C < B$, ſo iſt S negativ, d. h. das Dreieck neigt ſich nach der entgegengeſetzten Seite, nach B oder c.

Der oben in (3.) ausgeſprochene Satz läßt ſich demnach ſo ausdrücken: Jedes ſphäriſche Dreieck iſt nach dem größeren Winkel oder — was daſſelbe iſt — nach der kleineren Seite hin geneigt.

Um die Schiefe des Dreieckes durch die Seiten deſſelben auszudrücken, hat man nach §. 34, 4.

$$\sin(C-B) = \frac{(\cos b - \cos c)}{2\sin^2\frac{1}{2}a}\sin A.$$

Dieſen Werth in (φ) ſubſtituirt und für $\sin A$, in B, $\sin C$ die Werthe $\frac{2g}{\sin b \sin c}$, $\frac{2g}{\sin a \sin c}$, $\frac{2g}{\sin a \sin b}$ geſetzt, giebt:

$$\tang S = \frac{(\cos b - \cos a)\cos\frac{1}{2}a}{2g};$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\sin\frac{1}{2}(c-b) . \cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}};$$

Zuſ. 2. Der Nenner des zweiten Theiles (g) läßt ſich nach der Formel $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ (§. 2, 68.) verwandeln, und man erhält

$$\tang S = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\sin\frac{1}{2}(c-b) . \cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{(\sin^2\frac{1}{2}(b+c) - \sin^2\frac{1}{2}a)(\sin^2\frac{1}{2}a - \sin^2\frac{1}{2}(b-c))}}$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(c+b)$ $\sin\frac{1}{2}(c-b)$ ſo erhält der Ausdruck die Form

$$\tang S = \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}(b+c)}\right)\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}(b-c)} - 1\right)}};$$

Iſt die Grundſeite a und der Umfang $(a + b + c)$ unveränderlich — da dann auch $(b + c)$ ſich nicht ändert — ſo ändert ſich $\tang S$ nur nach $\sin^2 \frac{1}{2}(b - c)$. Daraus folgt:

Je größer bei gegebener Grundſeite und gegebenem Umfange die Differenz der veränderlichen Seiten iſt, deſto ſchiefer ſteht das Dreieck; und umgekehrt, je ſchiefer unter denſelben Umſtänden das Dreieck iſt, deſto größer iſt die Differenz der veränderlichen Seiten.

Daß dabei auch die Differenz der an der Grundſeite, alſo den veränderlichen Seiten gegenüber, liegenden Winkel mit der Schiefe zu und abnimmt folgt in Verbindung mit dem Geſagten aus

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(c - b)}{\sin\frac{1}{2}(c + b)}\,\mathrm{cotg}\,{}^{1}C \quad (\S.\ 33.)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(c - b)}{\sin\frac{1}{2}(c + b)}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a + b + c)\sin\frac{1}{2}(c + b - a)}{\sin\frac{1}{2}(a + b - c)\sin\frac{1}{2}(a + c - b)}} \quad (\S.\ 28,\ 3.)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(c - b)}{\sin\frac{1}{2}(c + b)}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}(c + b) - \sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}a - \sin^2\frac{1}{2}(c - b)}};$$

Iſt dagegen die Grundſeite a und die Differenz der andern beiden Seiten unveränderlich, ſo nimmt die Schiefe zu oder ab, je nachdem die Summe der veränderlichen Seite ab oder zunimmt.

§. 52.

Zieht man von einem zweiten Winkelpunkte B nach der gegenüber liegenden Seite AC (Fig. 6.) einen zweiten Bogen BE, (p''), der ſich mit dem erſten p' in P ſchneidet, ſo laſſen ſich auf das Dreieck BAD, in welchem BP, (q''), ein Bogen wie oben p' in ABC iſt, die Gleichungen des §. 49. anwenden. Die Gleichung (7.)

$$\frac{\sin A'' \sin a'''}{\sin A''' \sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

auf das genannte Dreieck angewendet giebt, indem A'', A''' mit B''', B'; a'', a''' mit r', q' (DP, PA) und b, c mit c, a'' vertauſcht werden,

$$\frac{\sin B''' \sin q'}{\sin B' \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''};$$

Sind D, E die Mittelpunkte der Seiten a, b ſo iſt:

1) $a'' = \frac{1}{2} a$; 2) $\frac{\sin B'''}{\sin B'} = \frac{\sin c}{\sin a}$; (§. 51, 1.)

Dieſe Werthe ſubſtituirt geben

$$\frac{\sin c . \sin q'}{\sin a . \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin \frac{1}{2} a};$$

Daraus folgt für die Abſchnitte q′, r′ des Bogens p′ die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \tfrac{1}{2} a.$$

Für die Abſchnitte q″, r″ des Bogens p″ iſt demnach

$$\frac{\sin q''}{\sin r''} = 2 \cos \tfrac{1}{2} b.$$

Bei ebnen Dreiecken iſt $\frac{q'}{r'} = 2$, welches Verhältniß aus $\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \frac{1}{2} a$ folgt, wenn die Seiten des ſphäriſchen Dreieckes unendlich klein angenommen werden.

Schneiden ſich die Bogen p′, p‴ ſo erhält man für die Abſchnitte derſelben ebenfalls

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \tfrac{1}{2} a; \text{ und } \frac{\sin q'''}{\sin r'''} = 2 \cos \tfrac{1}{2} c.$$

Hieraus folgt der Satz:

Wenn aus den drei Winkelpunkten eines ſphäriſchen Dreieckes nach den Mittelpunkten der gegenüber liegenden Seiten Bogen gezogen werden ſo ſchneiden ſich dieſe in einem Punkte.

Denn bezeichnet man die Abſchnitte q′, r′, die der Durchſchnitt von p′ mit p″ auf p′ erzeugt, durch x, y; die durch den Schnitt von p′ und p‴ auf p′ entſtandenen durch x′, y′; ſo iſt:

1) $y = p' - x$; $y' = p' - x'$; und

2) $2 \cos \frac{1}{2} a = \frac{\sin x}{\sin (p' - x)} = \frac{\sin x'}{\sin (p' - x')}$;

Hieraus folgt wie §. 47 daß $x' = x$, alſo der Durchſchnitt von p' mit p'' und der von p' mit p''' derſelbe ſein muß.

Zuſ. Die Gleichung 7. des §. 49.

$$\frac{\sin A'' \sin a'''}{\sin A''' \sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

auf die durch den Bogen p'' gebildeten Abſchnitte bezogen giebt:

$$\frac{\sin B' \sin b''}{\sin B''' \sin b'} = \frac{\sin a}{\sin c};$$

Multiplizirt man dieſe Gleichung mit der oben entwickelten

$$\frac{\sin B''' \sin q'}{\sin B' \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''};$$

ſo erhält man $\dfrac{\sin b''' \sin q'}{\sin b' \sin r'} = \dfrac{\sin a}{\sin a''}$; oder

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin a . \sin b'}{\sin a'' \sin b'''}; \ (\varphi)$$

Zieht man den dritten Bogen p''' durch den Durchſchnittspunkt von p' und p'' ſo erhält man für p' und p''' das Reſultat in (φ) durch Vertauſchung von b gegen c und ($'''$) gegen ($''$), alſo:

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin a . \sin c'}{\sin a''' \sin c''}; \ (\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt

$$\sin a'' \sin b''' \sin c' = \sin a''' \sin b' \sin c'';$$

wo die Abſchnitte a'', b''', c' des erſten Theiles von einander getrennt ſind durch die des zweiten Theiles, ſo wie dieſe durch jene. Hieraus ergiebt ſich der Satz:

Wenn von den Winkelpunkten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen beliebigen Punkt innerhalb deſſelben Bogen bis zu den gegenüber liegenden Seiten gezogen werden, ſo iſt das Produkt aus den Sinus je drei von einander getrennter Seitenabſchnitte dem Produkte der Sinus der übrigen Seitenabſchnitte gleich.

Der Satz iſt übrigens auch gültig, wenn der Punkt P,

in welchem ſich die von A, B, C gezogenen Bogen ſchneiden, nicht innerhalb des Dreieckes liegt, ſondern ein beliebiger Punkt der Kugelfläche iſt. Es tritt nur der Unterſchied ein, daß von den Abſchnitten der Seiten einige größer als die Seiten ſelbſt werden, indem die andern zu denſelben Seiten gehörigen Abſchnitte außerhalb fallen, die dann als negative zu betrachten ſind.

Es ſei nämlich (Fig. 11.) P ein Punkt außerhalb des Dreieckes ABC, der entweder in einem der Nebendreiecke von ABC oder in einem der Gegendreiecke derſelben liegen muß. Er liege in dem Nebendreiecke ACB'. Zieht man durch P von A, B, C die Bogen APD, CPF, BEPB', ſo iſt in dem Dreiecke ACB' nach dem Erwieſenen

$$\sin CD \,.\, \sin B'F \,.\, \sin AE = \sin EC \,.\, \sin B'D \,.\, AF.$$

Nimmt man für B'F und B'D die Supplemente BF, BD, welche dieſelben Sinus haben, ſo iſt:

$$\sin CD \,.\, \sin BF \,.\, \sin AE = \sin EC \,.\, \sin BD \,.\, \sin AF;$$

In Bezug auf das Dreieck ABC iſt nun:

$$CD = -a'''; \quad EC = b''';$$
$$BF = c''; \quad AD = a'';$$
$$AE = b'; \quad AF = -c';$$

Daher $\sin(-a''') \sin c'' \sin b' = \sin b''' \sin a'' \sin(-c')$
folglich wie oben

$$\sin a''' \sin c'' \sin b' = \sin b''' \sin a'' \sin c'.$$

Liegt aber P in dem Gegendreiecke des Dreieckes ABC ſelbſt, oder eines der Nebendreiecke; ſo liegt deſſen Gegenpunkt P' innerhalb ABC oder eins der Nebendreiecke. Die von A, B, C durch P gezogenen Bogen gehen nun auch durch P' und man erhält alſo dieſelben Seitenabſchnitte, wie wenn man von A, B, C ſogleich durch P' zieht.

§. 53.

Werden die Winkel A, B durch p', p'' halbirt, ſo iſt in der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\sin B'''.\sin q'}{\sin B'.\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''} \quad (\S.\ 52.)$$

$B''' = B'$, daher iſt dann $\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''}$;

Da b, a''' eben ſo an q', r' liegen, wie c, a'', ſo wird auch

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin b}{\sin a'''} \text{ ſein;}$$

was übrigens ſchon aus $\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\sin c}{\sin b}$ (§. 50, 4.) hervorgeht.

Für die Abſchnitte q'', r'' hat man demnach

$$\frac{\sin q''}{\sin r''} = \frac{\sin c}{\sin b'} = \frac{\sin a}{\sin b'''};$$

Werden A, C durch p', p''' halbirt, ſo erhält man:

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin a'''};$$

$$\frac{\sin q'''}{\sin r'''} = \frac{\sin a}{\sin c''} = \frac{\sin b}{\sin c'};$$

woraus ſich, wie §. 53. der Satz ergiebt, daß diejenigen drei Bogen, durch welche die Winkel des Dreieckes halbirt werden, ſich in einem und demſelben Punkte ſchneiden.

Zuſ. Nach der oft erwähnten Gleichung 7. des §. 49. iſt für den Bogen p': $\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b \sin A'''}{\sin c \sin A''}$; (α)

Durch Verwechſelung erhält man

für p'' $\quad \frac{\sin b'}{\sin b'''} = \frac{\sin c.\sin B'}{\sin a.\sin B'''}$; (β)

für p''' $\quad \frac{\sin c''}{\sin c'} = \frac{\sin a \sin C''}{\sin b \sin C'}$; (γ)

Multiplizirt man (α), (β), (γ), ſo erhält man

$$\frac{\sin a''' \sin b' \sin c''}{\sin a'' \sin b''' \sin c'} = \frac{\sin A''' \sin B' \sin C''}{\sin A'' \sin B'' \sin C'};$$

Nun iſt nach dem Zuſ. des vorigen §.

$$\sin a''' \sin b' \sin c'' = \sin a'' \sin b''' \sin c';$$

daher iſt auch $\sin A''' \sin B' \sin C'' = \sin A'' \sin B''' \sin C'$.

Daß dieſe Gleichung gültig iſt, wenn der Durchſchnitt P der Bogen p', p'', p''' ein beliebiger Punkt der Kugelfläche iſt; geht aus dem §. 52, Zuſ. Geſagten hervor. Es ergiebt ſich hieraus der Satz:

Wenn von den Winkelpunkten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen beliebigen Punkt der Kugelfläche Bogen gezogen und bis zu den gegenüber ſtehenden Seiten oder deren Verlängerungen geführt werden, ſo iſt das Produkt der Sinus je drei von einander getrennter Winkelabſchnitte dem Produkte der Sinus der übrigen Winkelabſchnitte gleich.

§. 54.

Lehrſatz. Wenn in einem Nebenkreiſe zwei (ſphäriſche) Sehnen gezogen werden, die ſich ſchneiden, ſo verhalten ſich die Sinus der halben Differenzen, desgleichen die Sinus der halben Summen je zweier Abſchnitte, wie die Sinus der Hälften derjenigen Sehnen, durch welche die Endpunkte derſelben Abſchnitte verbunden werden.

Beweis. In dem Nebenkreiſe ABA'B' (Fig. 12.) ziehe man zwei (ſphär.) Sehnen AA', BB', die ſich in C ſchneiden und verbinde die Abſchnitte CA, CB, ſo wie CA', CB' durch die Sehnen AB, C'B'. Zu beweiſen iſt, daß:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(AC-BC)}{\sin\frac{1}{2}(B'C-A'C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(AC+BC)}{\sin\frac{1}{2}(B'C+A'C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}$$ ſei.

Zieht man noch die ſphär. Sehne BA', ſo iſt in den auf der gemeinſchaftlichen Sehne BA' liegenden Dreiecken BA'A und und BA'B' nach g. S. §. 75.

$$ABA' + AA'B - BAA = B'BA' + B'A'B - BB'A'.$$

Zieht man auf beiden Seiten die gemeinſchaftlichen Theile

$$B'BA' + AA'B$$

ab, ſo ergiebt ſich $ABC - BAC = B'A'C - A'B'C$,

oder, wenn dieſe Winkel der Dreiecke ABC, A'B'C nach ihren Scheitelpunkten reſp. durch B, A, A', B' bezeichnet werden,

$$B - A = A' - B'.$$

Bezeichnet man in denſelben Dreiecken die Seiten AB, AC, BC durch c, b, a, ſo wie durch c', b', a' die Seiten A'B', A'C, B'C, ſo iſt nach §. 32, D.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

und $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

folglich, da $B-A=A'-B'$ iſt,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

Ferner iſt $$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}c} \quad (\text{§. 32, A.})$$

und $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'-B')}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

daher $$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

mithin $$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

Zuſ. 1. Zieht man von dem Mittelpunkte M des Kreiſes den ſphär. Radius MA und auf die Sehne AB das Perpendikel MD, das verlängert in E auch den Nebenbogen AB halbirt; ſo iſt der Winkel AME $= \frac{AE}{\sin AM}$, weil sin AM der Halbmeſſer der Kreisebne ABA'B' iſt. Der Quotient $\frac{AE}{\sin AM}$, der den relativen Werth des Bogens AE ausdrückt, ſei durch $\frac{1}{2}\gamma$ bezeichnet, indem γ den relativen

Werth des Nebenbogens AB andeuten ſoll. In dem rechtwinkligen Dreiecke AMD iſt nun $\sin AD = \sin AM \sin AMD$, oder wenn AD wieder durch $\frac{1}{2}c$, AM durch r bezeichnet und für AMD der Werth $\frac{1}{2}\gamma$ geſetzt wird,

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \sin r . \sin\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Ebenſo iſt für die Sehne A′B′ $\sin\frac{1}{2}c' = \sin r \sin\frac{1}{2}\gamma'$, indem γ' den relativen Werth des Nebenbogens A′B′ bezeichnet. Daher iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}$; folglich nach dem Lehrſatze

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'};$$

Zuſ. 2. Aus der Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$ folgt die andere: $\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$

hieraus: $\frac{\tang\frac{1}{2}b - \tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}b + \tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}a' - \tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}a' + \tang\frac{1}{2}b'}$; (§. 2, 70.)

endlich $\tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}a' = \tang\frac{1}{2}b \tang\frac{1}{2}b'$.

Zwiſchen den Abſchnitten zweier Sehnen findet alſo die merkwürdige Beziehung ſtatt, daß die Tangenten ihrer Hälften in umgekehrtem Verhältniſſe ſtehen, oder daß die Tangenten der halben Abſchnitte einer und derſelben Sehne ein eben ſo großes Produkt als die der andern Sehne geben — eine intereſſante Analogie der ſphäriſchen und der ebnen Kreisfläche!

Es folgt hieraus der g. S. §. 64, Zuſ. 2. bemerkte Satz, daß, wenn ein Abſchnitt der einen Sehne größer als ein Abſchnitt der andern iſt, der zweite Abſchnitt jener Sehne kleiner als der zweite der andern ſein muß.

Zuſ. 3. Wird eine von den Sehnen halbirt, etwa BB′, ſo iſt a = a′, daher

$$\tang^2\tfrac{1}{2}a = \tang^2\tfrac{1}{4}BB' = \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}b'.$$

Zieht man alſo durch einen beliebigen Punkt A innerhalb des Kreiſes mehrere Sehnen, (Fig. 13.) A′B′, A″B″, A‴B‴, ſo iſt:

$$\tang \tfrac{1}{2} AA' \tang \tfrac{1}{2} AB' = \tang \tfrac{1}{2} AA'' \tang \tfrac{1}{2} AB''$$
$$= \tang \tfrac{1}{2} AA''' \tang \tfrac{1}{2} AB'''$$
$$= \tang^2 \tfrac{1}{2} AC = \tang^2 \tfrac{1}{2} BC$$

wo BC die Sehne iſt, deren Mittelpunkt A, die alſo auf dem von A nach dem Mittelpunkte M des Kreiſes gezogenen Bogen AM ſenkrecht iſt.

Zuſ. 4. Zieht man von einem beliebigen Punkte D der Peripherie eines Nebenkreiſes (Fig. 14.) auf den Durchmeſſer AB ein Perpendikel DC, das die Hälfte der Sehne DE iſt, ſo iſt:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} DC = \tang \tfrac{1}{2} AC . \tang \tfrac{1}{2} CB.$$

Es iſt alſo die Tangente der Hälfte des Perpendikels, welches von der Peripherie eines Nebenkreiſes auf einen ſphäriſchen Durchmeſſer deſſelben gefällt wird, die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der halben Abſchnitte des Durchmeſſers.

Man vergleiche hiermit die Proportion im rechtwinkligen Dreiecke (§. 48.)

$$\sin^2 DC = \tang AC . \tang CB.$$

Zuſ. 5. Bezeichnet man das Perpendikel DC mit y, den ſphär. Radius MA mit r, das Stück MC des Durchmeſſers AB mit x, ſo iſt: $CB = r - x$; $AC = r + x$, daher nach vorigem Zuſatze

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} y = \tang \tfrac{1}{2}(r - x) \tang \tfrac{1}{2}(r + x);$$

Wird AC mit x' bezeichnet, ſo iſt $CB = 2r - x'$; alſo

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} y = \tang \tfrac{1}{2} x' \tang \tfrac{1}{2}(2r - x'),$$

welche Formeln, wie die analogen der Planimetrie

$$y^2 = (r - x)(r + x) \text{ und } y^2 = x'(2r - x')$$

ähnliche Gleichungen des Kreiſes geben.

§. 55.

Lehrſatz. Wenn von einem Punkte außerhalb des Nebenkreiſes zwei ſphäriſche Sekanten gezogen werden, ſo verhalten ſich die Sinus der

halben Differenz der Sekanten und der halben Differenz der äußeren Abſchnitte, desgleichen die Sinus der halben Summe der Sekanten und der halben Summe der äußeren Abſchnitte wie die Sinus der halben Bogen, durch welche die Endpunkte der Sekanten und die der äußern Abſchnitte verbunden werden.

Beweis. Man ziehe (Fig. 15.) von dem Punkte C die Sekanten CA, CB, deren äußere Abſchnitte CA′, CB′ ſind, und verbinde durch die Bogen AB, A′B′ die beiderſeitigen Endpunkte. In dem Vierecke ABB′A′ iſt nun $A + \beta = B + \alpha$; (g. S. §. 75., Zuſ. 3.). Bezeichnet man die Winkel CA′B′, CB′A′ durch A′, B′, ſo iſt $\alpha = \pi - A'$; $\beta = \pi - B'$, alſo

$$A + \pi - B' = B + \pi - A' \text{; daher}$$
$$A - B = B' - A'$$

In dem Dreiecke ABC, deſſen Seiten AB, AC, BC durch c, b, a bezeichnet ſeien, iſt nun:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

in dem Dreiecke A′B′C, deſſen Seiten c′, b′, a′ ſeien, iſt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B'-A')}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

Da $A - B = B' - A'$ iſt, ſo folgt hieraus:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

Es iſt ferner in dem Dreiecke ABC

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

und in A′B′C $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(B'-A')}{\sin\frac{1}{2}C} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}c'}$;

daher $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}c'}$; oder $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$.

Folglich iſt $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$.

Zuſ. 1. Werden die relativen Werthe der Nebenbogen AB, A'B' wieder durch γ, γ' bezeichnet, ſo iſt auch hier

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}.$$

Zuſ. 2. Auch hier ergiebt ſich aus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}$$

die merkwürdige Proportion $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'}$ oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b',$$

in Worten: Die Tangenten der halben ſphäriſchen Sekanten verhalten ſich umgekehrt, wie die Tangenten ihrer halben äußern Abſchnitte; oder: Wenn von einem Punkte der Kugelfläche nach einem Nebenkreiſe zwei oder mehrere ſphäriſche Sekanten gezogen werden, ſo ſind die Produkte aus den Tangenten der Hälfte jeder Sekante und ihres äußern Abſchnittes bei allen gleich.

Zuſ. 3. Zieht man von C an den Kreis einen Berührungsbogen (ſpäriſche Tangente) CD, der nichts anderes, als die äußerſte Sekante iſt, die mit ihrem äußeren Abſchnitte zuſammenfällt, ſo iſt:

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}CD = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'.$$

Es iſt alſo die Tangente des halben Berührungsbogens die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hälfte einer von demſelben Punkte aus gezogenen Sekante und des äußeren Abſchnittes derſelben.

Zuſ. 4. Zieht man von C aus die größte Sekante CA'', die durch den Mittelpunkt M des Kreiſes geht, und den kleinſten äußern Abſchnitt CB'' bildet und bezeichnet man den Abſtand CM mit x; den ſphäriſchen Radius MB'' mit r, den Berührungsbogen CD mit y, ſo iſt $CA'' = x + r$; $CB'' = x - r$; daher:

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}y = \tan \tfrac{1}{2}(x-r) \tan \tfrac{1}{2}(x+r).$$

Wird CB″ mit x′ bezeichnet, ſo iſt $CA'' = 2r + x'$ und

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}y = \tan \tfrac{1}{2}x' \tan \tfrac{1}{2}(2r + x').$$

§. 56.

Aufgabe. Zwei Gegenkreiſe zu konſtruiren, von denen der eine durch zwei Winkelpunkte eines ſphäriſchen Dreieckes geht, der andere aber die jenen Winkelpunkten gegenüber liegenden Seiten des Dreieckes ſchneidet.

Auflöſung. Es ſei ABC (Fig. 16.) ein ſphäriſches Dreieck, und A, B ſeien die Punkte, durch welche einer von den zu konſtruirenden Kreiſen geht, deſſen Gegenkreis die Seiten AC, BC ſchneiden ſoll. Man ziehe durch den Mittelpunkt D der Seite AB ſenkrecht einen Hauptkreis, in welchem ſich die Mittelpunkte M, M′ der Gegenkreiſe befinden, zwiſchen den das Dreieck liegt (g. S. §. 61, Zuſ. 2.). Nimmt man nun auf dieſem Perpendikel MDM′ unterhalb M einen beliebigen Punkt m, doch ſo, daß mD, folglich auch $mA < \frac{1}{2}\pi$ iſt; beſchreibt um denſelben mit dem Radius Am einen Kreis und mit demſelben Radius um den Gegenpunkt m′ den Gegenkreis deſſelben; ſo ſchneidet der letztere die Seiten AC, BC.

Beweis I. Sollte der um m′ beſchriebene Kreis die Seiten AC, BC nicht ſchneiden, ſo müßte er über der Spitze C vorbeigehen, da er wegen g. S. §. 79, Zuſ. nicht durch C gehen kann. Man verlängere alsdann die Seite BC, die den Kreis in F′ treffe und ziehe AF′. Das Dreieck ABF′ liegt dann zwiſchen den um m, m′ beſchriebenen Gegenkreiſen und iſt größer als ABC. Nun iſt nach g. S. §. 78. der Winkel DAM das Komplement des halben Flächenraumes von ABC, ſo wie DAm von ABF′, alſo:

$$\tfrac{1}{2}ABC = \tfrac{1}{2}\pi - DAM;$$

$$\tfrac{1}{2}ABF' = \tfrac{1}{2}\pi - DAm;$$

Da $ABF' > ABC$ iſt, ſo müßte $DAM > DAm$ ſein; was

offenbar unmöglich iſt, daher muß der um m' beſchriebene Kreis die Seiten AC, BC ſchneiden.

Liegt der Mittelpunkt M nicht unter AB, wie in der Figur, ſo ergeben dieſelben Schlüſſe die Richtigkeit der Auflöſung.

Beweis II. Da (Fig. 17a) $Dm < \frac{1}{2}\pi$ iſt, ſo iſt die Hypotenuſe $Am > Dm$; dagegen iſt, wenn d den Durchſchnitt des um M mit dem Radius AM beſchriebenen Kreiſes und des Perpendikels MDM' bezeichnet — $Am < md$, weil md der größte Bogen von m nach der Peripherie des Kreiſes AdB iſt (g. S. §. 64.). Der um m mit dem Radius Am beſchriebene und durch A, B gehende Kreis AδB ſchneidet alſo das Perpendikel MDM' in einem Punkte δ zwiſchen D und d. Nimmt man nun $M'm' = Mm$, $M'\delta' = M\delta$ und $M'd' = Md$, ſo ſind m', δ', d' die Gegenpunkte von m, δ, d und der um m' mit dem Radius Am beſchriebene Gegenkreis von AδB geht durch die Gegenpunkte A', δ', B' von A, δ, B, während der Gegenkreis von AdB durch A', B', d' und durch die Spitze C des Dreieckes ABC, deſſen Gegenkreiſe AdB, A'd'B' ſind, geht. Indem alſo der Bogen A'δ'B' innerhalb des Kreiſes A'd'B' liegt, iſt der übrige Theil A'FEB' des um m' beſchriebenen Kreiſes zwiſchen den Gegenkreiſen AdB, A'd'B'C enthalten, der alſo nothwendig die Bogen AC, BC in zwei Punkte E, F ſchneiden muß.

Anmerk. In Fig. 17. b, iſt dieſelbe Konſtruktion auf der Kugelfläche dargeſtellt.

Zuſ. 1. Bei der beliebigen Lage des Punktes m genügen unzählige Gegenkreiſe der Aufgabe, die daher noch eine Beſtimmung erhalten kann. Soll z. B. der ſchneidende Gegenkreis die Seite BC in dem gegebenen Punkte F treffen, ſo hat man die Gegenkreiſe des Dreieckes ABF zu konſtruiren, die dann völlig beſtimmt ſind.

Zuſ. 2. Nimmt man zwiſchen m und M einen Punkt n, (Fig. 17a.) deſſen Gegenpunkt n' zwiſchen m' und M' liegt, ſo iſt $An < Am$, jedoch $> AM$. Der um n' mit dem

Radius An beſchriebene Kreis trifft alſo die Seiten AC, BC zwiſchen E, F und C. Je näher alſo m an M kommt, deſto kleiner werden die Abſchnitte EC, FC. Fällt m mit M, alſo die Gegenkreiſe um m, m′ mit den um M, M′ beſchriebenen Gegenkreiſen zuſammen, ſo gehen E, F in C zuſammen; die obern Abſchnitte werden alſo Null. Rückt m über M hinaus, ſo erreicht der um m′ beſchriebene Gegenkreis die Seiten AC, BC nicht mehr, die alſo verlängert werden müſſen, wenn Durchſchnitte erfolgen ſollen. Solche Verlängerungen ſeien CF′, CE′ Fig. 16. Da die Richtungen von CF′, CE′ entgegengeſetzt denen von CF, CE ſind, ſo wie auch die Richtung des den Bogen AC mit BC verbindenden Nebenbogens E′F′ entgegengeſetzt iſt der Richtung des die entgegengeſetzten Seiten derſelben Bogen verbindenden Nebenbogens EF; ſo können die Verlängerungen CE′, CF′ als negative Abſchnitte und der Verbindungsbogen E′F′ der Verlängerungen als ein negativer Verbindungsbogen von Abſchnitten betrachtet werden.

§. 57.

Lehrſatz. Wenn zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen Nebenkreis, deſſen Gegenkreis durch die jenen Seiten gegenüber liegenden Winkelpunkte des Dreieckes geht, geſchnitten und die Durchſchnittspunkte durch einen (Haupt-) Bogen verbunden werden; ſo ſtehen.

1) die Sinus der halben Differenzen der getheilten Seiten und der oberen Abſchnitte derſelben;

2) die Sinus der halben Summen derſelben Seiten und derſelben Abſchnitte;

3) die Sinus der halben dritten Seite und des halben Verbindungsbogens der Durchſchnittspunkte in gleichem Verhältniſſe.

Beweis. Es ſei (Fig. 18.) A′B′A″B″ der Kreis, der

die Seiten AC, BC des Dreieckes ABC in A′, B′ ſchneidet, während der Gegenkreis deſſelben durch A, B geht. Verlängert man über C hinaus die Seiten AC, BC, die in A″, B″ zum zweitenmale den Kreis ſchneiden, ſo iſt nach §. 54.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB''-CA'')}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB''+CA'')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}A''B''}{\sin\frac{1}{2}A'B'}.$$

Da die Punkte A, B in der Peripherie des unteren Gegenkreiſes liegen, ſo ſind A″, B″ die Gegenpunkte von A, B; daher der Bogen $A''B''=AB$, $CA''=\pi-CA$; $CB''=\pi-CB$; mithin $CB''-CA''=CA-CB$ und $CB''+CA''=2\pi-(CA+CB)$

folglich $\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}$;

oder, wenn CB, CA, AB, durch a, b, c; die obern Abſchnitte CA′, CB′ durch b′, a′ und A′B′ durch c′ bezeichnet wird,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$$

Zuſ. 1. Für $\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ kann wieder $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}$ geſetzt werden, indem γ', γ die relativen Werthe der Nebenbogen A′B′, AB (=A″B″) bedeuten.

Zuſ. 2. Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$ folgt wie §. 54 und 55. die Proportion

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b},$$

in Worten: **Die Tangenten der halben obern Abſchnitte ſind proportionirt den Tangenten der halben Seiten.**

Zuſ. 3. Aus $\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b}$ folgt

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a-\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a+\tang\frac{1}{2}a'} = \frac{\tang\frac{1}{2}b-\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b+\tang\frac{1}{2}b'}$$

und hieraus, indem Zähler und Nenner reſpektive mit $\cos\frac{1}{2}a$ $\cos\frac{1}{2}a'$ und $\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b'$ multiplizirt werden:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-a')}{\sin\frac{1}{2}(a+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-b')}{\sin\frac{1}{2}(b+b')},$$

wo $a-a'$ und $b-b'$ die untern Abſchnitte der Seiten a, b ſind.

Es verhalten ſich alſo die Sinus der halben untern Abſchnitte wie die Sinus der halben Summen aus jeder Seite und ihrem obern Abſchnitte.

Zuſ. 4. Werden zwei Seiten AC, BC (Fig. 19.a.) über die Spitze C verlängert und in A′, B′ von einem Nebenkreiſe, deſſen Gegenkreis durch A, B geht, geſchnitten, ſo iſt dieſer Fall in dem Lehrſatze enthalten, inſofern die Verlängerungen A′C, B′C ſo wie der Verbindungsbogen A′B′, als negativ betrachtet werden. In den obigen Proportionen iſt daher in dieſem Falle für a′, b′, c′ zu ſetzen: — B′C — A′C, — A′B′ und man erhält

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(-CA'+CB)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(-CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}(-A'B')}$$

daher wie oben

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}.$$

Daſſelbe läßt ſich direkt aus §. 55. erweiſen, denn verlängert man (Fig. 19.b) die Bogen CB′, CA′ bis zum zweiten Durchſchnitte B″, A″ mit dem ſchneidenden Kreiſe, ſo iſt nach §. 55.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB'-CA')}{\sin\frac{1}{2}(CA''-CB'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB'+CA')}{\sin\frac{1}{2}(CA''+CB'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}A''B''}.$$

Da nun A″, B″ die Gegenpunkte von A, B ſind, ſo iſt $CA''=\pi-AC$; $CB''=\pi-BC$ und $A''B''=AB$, daher $CA''-CB''=CB-CA$ und $CA''+CB''=2\pi-(AC+BC)$, folglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB'-CA')}{\sin\frac{1}{2}(CB-CA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB'+CA')}{\sin\frac{1}{2}(CB+CA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}AB}.$$

Daher iſt der Lehrſatz mit den daraus gezogenen Folgerungen gültig, der ſchneidende Kreis mag

die Seiten des Dreieckes unmittelbar, oder ihre Verlängerungen treffen.

Zus. 5. Da $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ (§. 32.) und nach derselben Formel in dem Dreiecke A'B'C (Fig. 18.)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C} \text{ ist;}$$

so folgt aus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'} \text{ oder } \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'}$$

daß auch $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C}$, also daß $A-B = A'-B'$ ist. Dasselbe ergiebt sich aus einer einfachen Betrachtung. Denn in den Dreiecken A'B'C, A''B''C ist nach §. 54.

$$A'-B' = B''-A''.$$

Das Dreieck A''B''C aber, da A'', B'' die Gegenpunkte von A, B sind, ist nichts anderes, als das Gegen-Nebendreieck $\begin{Bmatrix}\bar\alpha\bar\beta\gamma\\ \bar a\bar b c\\ \bar A\bar B C\end{Bmatrix}$, in welchem die Winkel A'', B'' die Supplemente von A, B sind. Aus $A'-B' = B''-A'' = (\pi-B)-(\pi-A)$ folgt nun: $A'-B' = A-B$.

Beiläufig ergiebt sich hieraus, daß $B+\pi-B' = A+\pi-A'$ ist; wo $\pi-B'$, $\pi-A'$ die Nebenwinkel von B', A', also die Winkel BB'A', AA'B' des sphärischen Trapezes ABA'B' sind. Im sphärischen Trapeze geben also die Winkel an jeder der beiden Seiten, welche nicht in den Gegenkreisen des Trapezes liegen, gleiche Summen.

Zus. 6. 1) Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)+\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')+\sin\frac{1}{2}c'}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

daher

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a'+b'+c')\cos\frac{1}{4}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}c'}; \quad (\alpha)$$

Eben ſo iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)-\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')-\sin\frac{1}{2}c'}{\sin\frac{1}{2}c'}$

daher

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{4}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{4}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\beta)$$

Wie $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$; ſo iſt auch

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$$

Jn (α) und (β) kann daher b, b' gegen (—b), (—b') vertauſcht werden, um ſogleich das Reſultat der eben ſo behandelten Gleichung $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ zu erhalten.

Dies giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{4}(a'+c'-b')\cos\frac{1}{4}(b'+c'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\gamma)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{4}(a'+c'-b')\sin\frac{1}{4}(b'+c'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\delta)$$

2) Dividirt man (α) durch (β) und (γ) durch (δ), ſo erhält man:

$$\frac{\tan\frac{1}{4}(a+b+c)}{\tan\frac{1}{4}(a+b-c)}=\frac{\tan\frac{1}{4}(a'+b'+c')}{\tan\frac{1}{4}(a'+b'-c')};\ (\varepsilon)$$

$$\frac{\tan\frac{1}{4}(c+a-b)}{\tan\frac{1}{4}(c+b-a)}=\frac{\tan\frac{1}{4}(c'+a'-b')}{\tan\frac{1}{4}(c'+b'-a')};\ (\zeta)$$

Multiplizirt man (α) mit β und (γ) mit (δ) ſo ergiebt ſich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin^2\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')}{\sin^2\frac{1}{2}c'};\ (\eta)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin^2\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(c'+b'-a')\sin\frac{1}{2}(c'+a'-b')}{\sin^2\frac{1}{2}c'};\ (\vartheta)$$

Durch Diviſion von (η) durch (ϑ) folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}(c'+b'-c')\sin\frac{1}{2}(c'+a'-b')};$$

Durch Multiplikation:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin^4\frac{1}{2}c} =$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')\sin\frac{1}{2}(a'+c'-b')\sin\frac{1}{2}(b'+c'-a')}{\sin^4\frac{1}{2}c'};$$

oder, wenn g, g' in der §. 28 angegebenen Bedeutung genommen werden,

$$\frac{g^2}{\sin^4\frac{1}{2}c} = \frac{g'^2}{\sin^4\frac{1}{2}c'} \text{ daher } \frac{g}{\sin^2\frac{1}{2}c} = \frac{g'}{\sin^2\frac{1}{2}c'}.$$

3) Werden die Flächenräume der Dreiecke ABC, A'B'C durch T, T' bezeichnet, ſo iſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{g}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad (\text{§. } 41.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \frac{g'}{2\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}b'\cos\frac{1}{2}c'}; \text{ daher}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{g}{g'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}b'\cos\frac{1}{2}c'}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c'}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus den Proportionen in (ϵ), (ζ) folgt: wenn
$\tan\frac{1}{2}(a+b-c) = k.\tan\frac{1}{2}(a+b+c)$; und
$\tan\frac{1}{2}(a+c-b) = k'\tan\frac{1}{2}(b+c-a)$ iſt, ſo iſt auch
$\tan\frac{1}{2}(a'+b'-c') = k\tan\frac{1}{2}(a'+b'+c')$ und
$\tan\frac{1}{2}(a'+c'-b') = k'\tan\frac{1}{2}(b'+c'-a')$;
daher:

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{2}(a+b-c)\tan\tfrac{1}{2}(a+c-b)\tan\tfrac{1}{2}(b+c-a) = kk'\tan^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\tan^2\tfrac{1}{2}(b+c-a); \text{ und}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')\tan\tfrac{1}{2}(a'+b'-c')\tan\tfrac{1}{2}(a'+c'-b')\tan\tfrac{1}{2}(b'+c'-a') = kk'\tan^2\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')\tan^2\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

folglich iſt:

$$\frac{\tan^2\frac{1}{4}T}{\tan^2\frac{1}{4}T'} = \frac{\tan^2\frac{1}{4}(a+b+c)\tan^2\frac{1}{4}(b+c-a)}{\tan^2\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan^2\frac{1}{4}(b'+c'-a')} \quad (\text{§. } 41.)$$

$$\text{oder } \frac{\tan\frac{1}{4}T}{\tan\frac{1}{4}T'} = \frac{\tan\frac{1}{4}(a+b+c)\tan\frac{1}{4}(b+c-a)}{\tan\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan\frac{1}{4}(b'+c'-a')}.$$

Jenachdem man in (ϵ) oder (ζ) oder in beiden zugleich die Nenner und Zähler verwechſelt, erhält man:

$$\frac{\tan g \frac{1}{4} T}{\tan g \frac{1}{4} T'} = \frac{\tan g \frac{1}{4}(a+b-c) \tan g \frac{1}{4}(b+c-a)}{\tan g \frac{1}{4}(a'+b'-c') \tan g \frac{1}{4}(b'+c'-a')};$$

$$= \frac{\tan g \frac{1}{4}(a+b+c) \tan g \frac{1}{4}(a+c-b)}{\tan g \frac{1}{4}(a'+b'+c') \tan g \frac{1}{4}(a'+c'-b')};$$

$$= \frac{\tan g \frac{1}{4}(a+c-b) \tan g \frac{1}{4}(a+b-c)}{\tan g \frac{1}{4}(a'+c'-b') \tan g \frac{1}{4}(a'+b'-c')};$$

Da $A-B=A'-B'$ iſt, ſo können dieſe Proportionen auch aus §. 40 bequem hergeleitet werden.

4) Da die Dreiecke ABC, A'B'C den Winkel C gemein haben, ſo iſt $\sin C = \frac{2g}{\sin a \sin b} = \frac{2g'}{\sin a' \sin b'}$; daher:

$$\frac{\sin a \sin b}{\sin a' \sin b'} = \frac{g}{g'} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} c'}.$$

Aus $\sin B = \frac{2g}{\sin a \sin c}$ und $\sin B' = \frac{2g'}{\sin a' \sin c'}$ folgt

$$\frac{\sin B}{\sin B'} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{\sin a' \sin c'}{\sin a \sin c} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} c'} \cdot \frac{\sin a' \sin c'}{\sin a \sin c} = \frac{\tan g \frac{1}{2} c \sin a'}{\tan g \frac{1}{2} c' \sin a};$$

Hieraus folgt zugleich

$$\frac{\tan g \frac{1}{2} c}{\tan g \frac{1}{2} c'} = \frac{\sin B \sin a}{\sin B' \sin a'} = \frac{\sin A \sin b}{\sin A' \sin a'}.$$

Für das Perpendikel p''', welches von C auf c gefällt wird, iſt nach §. 45 $\sin p''' = \sin B \sin a = \sin A \sin b$. Das Perpendikel in dem Dreiecke A'B'C von C auf c' ſey durch p''' bezeichnet, ſo iſt auch $\sin p''' = \sin B' \sin a'$; daher iſt:

$$\frac{\tan g \frac{1}{2} c}{\tan g \frac{1}{2} c'} = \frac{\sin p'''}{\sin p'''}.$$

Zuſ. 7. Die Seiten a, b können durch den ſchneidenden Kreis nicht beide zugleich halbirt werden. Denn wäre $a' = \frac{1}{2} a$; $b' = \frac{1}{2} b$; ſo würde aus

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a'+b')} \text{ folgen}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{4}(a-b)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{4}(a+b)}; \text{ und hieraus}$$

$$\cos \frac{1}{4}(a-b) = \cos \frac{1}{4}(a+b).$$

Alſo müßte $a-b=a+b$ ſein, was nicht möglich iſt.

§. 58.

Lehrſatz. Wenn zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen Parallelkreis der Gegenkreiſe, zwiſchen denen das Dreieck liegt, geſchnitten werden; ſo verhalten ſich die Sinus der halben Differenz und der halben Summe der oberen Abſchnitte wie die Sinus der halben Differenz und der halben Summe der untern Abſchnitte.

Beweis. Es ſeien M, M′ (Fig. 20.) die Mittelpunkte der Gegenkreiſe ABC′, A″B″C, zwiſchen denen das Dreieck ABC liegt. Um M und M′ beſchreibe man mit einem Radius, der größer als der der genannten Kreiſe iſt, die Gegenkreiſe abc, a′b′A′B′, welche in a, b und A′, B′ die Seiten AC, BC des Dreieckes ſchneiden. Verlängert man die obern Abſchnitte A′C, B′C, ſo daß ſie in A″, B″ den inneren, in a′, b′ den äußeren Kreis ſchneiden; ſo iſt nach §. 54

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(Cb'-Ca')}{\sin\frac{1}{2}(Cb'+Ca')}.$$

Da a′, b′ die Gegenpunkte von a, b ſind, ſo iſt:

$Ca'=\pi-Ca$; und $Cb'=\pi-Cb$; daher

$Cb'-Ca'=Ca-Cb$; und $Cb'+Ca'=2\pi-(Ca+Cb)$;

folglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(Ca-Cb)}{\sin\frac{1}{2}(Ca+Cb)};$$

Da ferner A″, B″ die Gegenpunkte von A, B ſind, ſo iſt $AA''=\pi=aa'$; folglich nach Abzug von aA″, der Abſchnitt $Aa=A''a'$. Eben ſo iſt $Bb=B''b'$. Nun iſt auch $A'C=A''a$; denn das Perpendikel M′D vom Mittelpunkte M′ auf die Sehnen A′a′ und CA″ halbirt beide, giebt alſo $A'D=Da'$ und $CD=DA''$, woraus $A'C=A''a'$ folgt. Eben ſo iſt $B'C=B''b'$. Hieraus und aus $Aa=A''a'$; $Bb=B''b'$ folgt, daß $Aa=A'C$; $Bb=B'C$, mithin auch $Ca=AA'$; $Cb=BB'$ iſt. Setzt man demnach für Ca, Cb die untern Abſchnitte AA′, BB′ in obiger Proportion, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')},$$

oder, wenn die obern Abſchnitte mit a', b' die untern mit a'', b'' bezeichnet werden,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b''-a'')}{\sin\frac{1}{2}(b''+a'')}.$$

Zuſ. 1. Aus dieſer Proportion folgt wieder

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}b'}=\frac{\tang\frac{1}{2}a''}{\tang\frac{1}{2}b''};$$

in Worten: Die Tangenten der halben oberen Abſchnitte ſind proportionirt der Tangenten der halben untern Abſchnitte.

Zuſ. 2. Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-b'')}{\sin\frac{1}{2}(a''+b'')}$ folgt die Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a')}{\sin\frac{1}{2}(a''+a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}(b''+b')}$. Denn zunächſt folgt daraus $\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}b'}=\frac{\tang\frac{1}{2}a''}{\tang\frac{1}{2}b''}$; hieraus

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a''-\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a''+\tang\frac{1}{2}a'}=\frac{\tang\frac{1}{2}b''-\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b'+\tang\frac{1}{2}b'}$$ und hieraus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a)}{\sin\frac{1}{2}(a''+a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}(b''+b')}.$$

Da $a''+a'=a$; $b''+b'=b$ iſt; ſo hat man die Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a')}{\sin\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}b}$;

in Worten: Die Sinus der halben Differenzen der obern und untern Abſchnitte ſind proportionirt den Sinus der halben Seiten, zu denen die Abſchnitte gehören.

Zuſ. 3. Die zwiſchen den Gegenkreiſen eines ſphäriſchen Dreieckes liegenden Seiten deſſelben können offenbar nur von ſolchen Parallelkreiſen jener Gegenkreiſe geſchnitten werden, die größer als jene ſind. Die kleineren Parallelkreiſe treffen zwar die bezeichneten Seiten des Dreieckes nicht, ſchneiden aber deren Verlängerungen, die als negative Ab-

ſchnitte betrachtet werden können. Es ſeien Fig. 21. ABC', A''B''C die Gegenkreiſe des Dreieckes ABC, deſſen Seiten AC, BC verlängert in A', B' von dem inneren Parallelkreiſe A'B'b'a' geſchnitten werden. Die obigen Proportionen ſind nun für dieſen Fall gültig, inſofern $a' = -CB'$; $b' = -CA'$ genommen wird. Daher iſt hier

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(-CA'+CB')}{\sin\frac{1}{2}(-CA'-CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')},$$

oder, wenn Zähler und Nenner des erſten Theiles entgegengeſetzt genommen werden

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')};$$

Ebenſo: $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}CA'}{\text{tang}\frac{1}{2}CB'}=\frac{\text{tang}\frac{1}{2}AA'}{\text{tang}\frac{1}{2}BB'}$

und $\frac{\sin\frac{1}{2}aA'}{\sin\frac{1}{2}AC}=\frac{\sin\frac{1}{2}bB'}{\sin\frac{1}{2}BC}$ oder $\frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}BC}=\frac{\sin\frac{1}{2}aA'}{\sin\frac{1}{2}bB'}$;

Demnach iſt der Lehrſatz gültig, wenn für die obern Abſchnitte, Verlängerungen und für die untern Abſchnitte, die Summen aus den ganzen Seiten und deren Verlängerungen genommen werden.

Zuſ. 4. Da die Abſchnitte CA' und Aa, ſo wie CB' und Bb gleich ſind, wie groß auch die ſchneidenden Gegenkreiſe ſein mögen, ſo muß der Hauptkreis, deſſen Pole M, M' ſind, die Seiten AC, BC beide halbiren.

Beſtimmung der um, in und an ſphäriſche Dreiecke beſchriebenen Kreiſe und Gegenkreiſe, ſo wie des Flächenraumes ſphäriſcher Dreiecke und Vierecke nach ihrer Lage zwiſchen Gegenkreiſen.

§. 59.

Aufgabe. Den ſphäriſchen Radius des um ein ſphäriſches Dreieck beſchriebenen Kreiſes durch die Stücke des Dreieckes auszudrücken.

Aufloͤſ. Es ſei M (Fig. 22.) der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beſchriebenen Kreiſes. Man ziehe den ſphäriſchen Radius MB und auf BC das Perpendikel MD, durch welches die Sehne BC halbirt wird; ſo iſt der Winkel $MBD = \frac{1}{2}(B+C-A)$ (g. S. §. 75.). In dem rechtwinkligen Dreiecke MDB iſt nun:

$$\tang MB = \frac{\tang BD}{\cos MBD}.$$

Bezeichnet man den Radius MB mit r, die Seite BC mit a, alſo BD mit $\frac{1}{2}a$, ſo iſt:

$$\tang r = \frac{\tang \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}; \quad (1.)$$

Eben ſo iſt: $\tang r = \frac{\tang \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C)}$; da nach §. 31, VII.

$$\frac{\tang \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\tang \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C)} \text{ iſt.}$$

Um r durch die Seiten des Deieckes auszudrücken, hat man (§. 31.) die Gleichung

$$\cos \frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{g}{2\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c};$$

Dieſen Ausdruck für $\cos \frac{1}{2}(B+C-A)$ in (1.) ſubſtituirt, giebt $\tang r =$

$$\frac{2\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}} \quad (2.)$$

Durch die Winkel des Dreieckes erhält man r ausgedrückt, wenn man in (1.) für $\tang \frac{1}{2}a$ den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+C-B) \cos \frac{1}{2}(A+B-C)}} \quad (\text{§. } 29, 3.)$$

ſubſtituirt. Dadurch ergiebt ſich

$$\tang r = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C-A) \cos \frac{1}{2}(A+C-B) \cos \frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$= \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\sqrt{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

$$= \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{G} = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{G}; \ (3.)$$

Anmerk. 1. Die hier ſich darbietende Relation

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{G}$$

oder $$\frac{g}{G} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}$$

läßt ſich aus der für $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ oben erwähnten Formel mit Rückſicht auf $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{g}{G}$ ſogleich herleiten.

Anmerk. 2. Die §. 31, VII. entwickelte Relation

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\tang\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$$

erhält hier mehr Bedeutung, da durch dieſe Quotienten der umgeſchriebene Kreis beſtimmt wird. Wenn dieſe Quotienten an die ähnlichen $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ erinnern, ſo findet auch in der That eine nähere Verwandtſchaft beider ſtatt. Denn für unendlich kleine Seiten fließen beide zuſammen in die analogen der ebnen Trigonometrie $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Indem nämlich bei unendlich kleinen ſphäriſchen Dreiecken die Winkelſummen $A+B+C=\pi$ wird, wird $\frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{1}{2}(B+C+A) - A = \frac{1}{2}\pi - A$, alſo $\cos\frac{1}{2}(B+C-A) = \sin A$; und aus $\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}$ erhält man $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$. In ſofern nun bei ebnen Dreiecken durch den Quotient $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$ der Halbmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes ausgedrückt wird, iſt die Gleichung $\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\tang\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$ ein Analogon zu der planimetriſchen $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Zuſ. 1. Aus $\tan r = \frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\tan\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}$

$= \frac{\tan\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$ erhält man

$$\tan^3 r = \frac{\tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b \tan\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)};$$

Wird dieſe Gleichung dividirt durch

$$\tan^2 r = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$$

die man aus der oben No. 3. für $\tan r$ entwickelten Formel erhält, ſo ergiebt ſich

$$\tan r = \frac{\tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b \tan\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}T} \quad (4.)$$

oder $\tan r \sin\frac{1}{2}T = \tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b \tan\frac{1}{2}c$.

Iſt T das Maximum, welches die Seiten a, b zulaſſen, ſo iſt nach §. 42. $\sin\frac{1}{2}T = \tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b$; daher erhält man dann aus (4)

$$\tan r = \tan\frac{1}{2}c, \text{ oder } c = 2r$$

In dem größten Dreiecke zweier Seiten iſt alſo die dritte Seite der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes.

Aus $\tan r \sin\frac{1}{2}T = \tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b \tan\frac{1}{2}c$, erhält man für ebne Dreiecke

$$4rT = abc;$$

d. h. das Prisma, welches den Flächenraum eines Dreieckes zur Baſis und den doppelten Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes zur Höhe hat, iſt dem rechtwinkligen Parallelepipedum aus den Seiten des Dreieckes gleich.

Zuſ. 2. Liegen zwei ſphäriſche Dreiecke T, T' auf gleicher Grundſeite c und in gleichen Kreiſen, ſo folgt aus

$$\sin\frac{1}{2}T \tan r = \tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b \tan\frac{1}{2}c;$$
$$\sin\frac{1}{2}T' \tan r = \tan\frac{1}{2}a' \tan\frac{1}{2}b' \tan\frac{1}{2}c';$$

die Proportion

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{\tan\frac{1}{2}a \tan\frac{1}{2}b}{\tan\frac{1}{2}a' \tan\frac{1}{2}b'}.$$

Sind M, M' die größten Dreiecke aus den Seiten a, b und a', b'; ſo iſt: $\sin\frac{1}{2}M = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}b$;

$$\sin\frac{1}{2}M' = \tang\frac{1}{2}a' \tang\frac{1}{2}b';$$

daher iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{\sin\frac{1}{2}M}{\sin\frac{1}{2}M'}$

Es verhalten ſich alſo die Sinus der halben Flächenräume zweier ſphäriſchen Dreiecke, welche auf gleichen Grundſeiten und in gleichen Nebenkreiſen liegen, wie die Sinus der halben Maxima, welche die andern beiden Seiten jedes Dreieckes zulaſſen.

Zuſ. 3. Die Formel $\tang r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{g}$ verwandelt ſich, wenn die Seiten a, b, c unendlich klein werden, in die planimetriſche Formel

$$r = \frac{2.\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}b.\frac{1}{2}c}{\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)\frac{1}{2}(a+c-b)\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

$$= \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}.$$

Das Sehnendreieck eines ſphäriſchen liegt mit dieſem in einem und demſelben Kreiſe. Wie die Seiten deſſelben die Sehnen der Bogen ſind, die das ſphäriſche Dreieck bilden, ſo iſt auch der gradlinige Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes die Sehne des ſphäriſchen Durchmeſſers deſſelben. Bezeichnen wir die Sehnen der Seiten a, b, c mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; ſo iſt $\frac{1}{2}\mathfrak{a}=\sin\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}\mathfrak{b}=\sin\frac{1}{2}b$; $\frac{1}{2}\mathfrak{c}=\sin\frac{1}{2}c$. Eben ſo iſt, wenn $\mathfrak{R}$ den Halbmeſſer der Kreisebne bezeichnet, $\mathfrak{R}=\sin r$. Aus der oben erwähnten Formel für $\mathfrak{R}$, nämlich

$$\mathfrak{R} = \frac{2\frac{1}{2}\mathfrak{a}.\frac{1}{2}\mathfrak{b}.\frac{1}{2}\mathfrak{c}}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b})\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a})}}$$

folgt daher für den Sinus des ſphäriſchen Radius r die Formel

$$\sin r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c)(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}c)(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}b)(\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}a)}}.$$

oder, wenn der ſymmetriſche Nenner des zweiten Theiles mit g bezeichnet wird

$$\sin r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}. \quad (5.)$$

Derſelbe Ausdruck findet ſich aus der Formel

$$\tang r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$$

wenn man ſetzt

$$\sin^2 r = \frac{\tang^2 r}{1 + \tang^2 r} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c + g^2};$$

wo $4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c + g^2 = g^2$ wird.

Aus $\tang r = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$;

und $\sin r = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$

folgt $\dfrac{\sin r}{\tang r} = \cos r = \dfrac{g}{g}. \quad (6.)$

Zuſ. 4. Für den Umſchreibungsradius r des Polardreieckes erhält man, indem in den für r entwickelten Formeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, die Seiten und Winkel gegen die Supplemente der Winkel und Seiten vertauſcht werden, die Formeln:

1) $\operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}$;

2) $\operatorname{tang} r = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{G}$;

3) $\operatorname{tang} r = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(c+b-a)}}$;

$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{g}$;

4) $\operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$;

5) $\sin r = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{\mathfrak{G}}$;

6) $\cos r = \frac{G}{\mathfrak{G}}$;

wo $\mathfrak{G} = \sqrt{(\cos \frac{1}{2} A + \cos \frac{1}{2} B + \cos \frac{1}{2} C)(\cos \frac{1}{2} A + \cos \frac{1}{2} B - \cos \frac{1}{2} C)(\cos \frac{1}{2} A + \cos \frac{1}{2} C - \cos \frac{1}{2} B)(\cos \frac{1}{2} B + \cos \frac{1}{2} C - \cos \frac{1}{2} A)}$;

Zwiſchen G und $\mathfrak{G}$ findet nach Zuſ. 3. die Gleichung

$\mathfrak{G}^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B \cos^2 \frac{1}{2} C + G^2$ ſtatt.

§. 60.

Aufgabe. Den ſphäriſchen Radius des eingeſchriebenen Kreiſes zu beſtimmen.

Auflöſung. Da der eingeſchriebene Kreis der Polarkreis des um das Polardreieck beſchriebenen, alſo der ſphäriſche Radius des erſteren das Komplement von dem des letzteren iſt (g. S. §. 71, §. 44.); ſo iſt, wenn ϱ den ſphär. Radius des eingeſchriebenen Kreiſes bedeutet, $\varrho=\frac{1}{2}\pi-r$. Daher ergeben ſich aus vorſtehendem Zuſatze die Formeln:

1) $\tang\varrho=\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\tang\frac{1}{2}A$;
$=\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\tang\frac{1}{2}B$;
$=\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\tang\frac{1}{2}C$;

2) $\tang\varrho=\frac{G}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$;

3) $\tang\varrho=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$
$=\frac{g}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$;

4) $\tang\varrho=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cotg\frac{1}{2}A\cotg\frac{1}{2}B\cotg\frac{1}{2}C}$
$=\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}C$;

5) $\cos\varrho=\frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\mathfrak{G}}$;

6) $\sin\varrho=\frac{G}{\mathfrak{G}}$.

Unabhängig von jenen Formeln laſſen ſich dieſe aus Konſtruktion herleiten. Das Dreieck ABC (Fig. 23.) werde von dem Kreiſe $\alpha\beta\gamma$, deſſen Mittelpunkt M iſt, in den Punkten α, β, γ berührt. Zieht man nach den Berührungspunkten die Radien $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, die auf den Tangenten BC, CA, AB ſenkrecht ſtehen (g. S. §. 65, Zuſ. 1.), und dann den Bogen MA, der den Winkel A der Tangenten BA, CA halbirt (g. S. §. 67, Zuſ. 4.); ſo iſt in dem rechtwinkligen Dreiecke $M\gamma A$

$$\tang M\gamma=\tang\tfrac{1}{2}A\sin A\gamma.$$

Da nun $A\gamma=A\beta$; $B\gamma=B\alpha$; $C\alpha=C\beta$ iſt (g. S. §. 67, Zuſ. 3.), ſo iſt $A\gamma+A\beta=AB+AC-BC=c+b-a$; daher $A\gamma=\frac{1}{2}(c+b-a)$ Dies in obiger Gleichung ſubſtituirt giebt:

$$\text{tang}\, M\gamma = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} A \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(c + b - a)$$

woraus die übrigen Formeln ſich wie im vorigen §. herleiten laſſen.

Zuſ. Aus $\text{tang}\, r = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$

und $\text{tang}\, \varrho = \dfrac{g}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)}$

folgt $\text{tang}\, r\, \text{tang}\, \varrho = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)}$

Dieſe Gleichung auf das Polardreieck angewendet, deſſen Um- und Einſchreibungsradien die Komplemente von ϱ und r ſind, giebt:

$$\cot g\, r \cot g\, \varrho = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C)}$$

oder $\text{tang}\, r\, \text{tang}\, \varrho = \dfrac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C)}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} T}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}.$$

Bemerkenswerth iſt die hieraus ſich ergebende Relation

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C)}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C};$$

Anmerk. Aus der Gleichung $\text{tang}\, r\, \text{tang}\, \varrho = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)}$

erhält man für ebne Dreiecke die Gleichung

$$2\, r \,.\, \varrho \,.\, (a + b + c) = a\, b\, c$$

d. h. das rechtwinklige Parallelepipedum aus den Seiten eines Dreieckes iſt von dem rechtwinkligen Parallelepipedum aus den Durchmeſſern der um- und eingeſchriebenen Kreiſe und dem Perimeter des Dreieckes die Hälfte.

§. 61.

Aufgabe. Den ſphäriſchen Radius der Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Dreieck liegt, zu beſtimmen.

Auflöſung. Nimmt man a als Grundſeite des Drei-

eckes $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma \\ a\;b\;c \\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}$, ſo ſind die Gegenkreiſe, zwiſchen denen daſſelbe liegt, diejenigen, in denen das Nebendreieck $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ und deſſen Gegendreieck $(\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma})$ liegen. Um alſo den ſphäriſchen Radius r' des um $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ beſchriebenen Kreiſes zu finden, braucht man nur die für r gefundenen Formeln des §. 59. auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\,\beta\,\gamma \\ a\;\bar{b}\;\bar{c} \\ A\,\bar{B}\,\bar{C}\end{matrix}\right\}$ anzuwenden. Daher iſt:

$$1)\quad \operatorname{tang} r' = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T}.$$

$$\text{und}\quad \operatorname{tang} r' = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)};$$

$$2)\quad \operatorname{tang} r' = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{g};$$

$$3)\quad \operatorname{tang} r' = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{G};$$

$$4)\quad \operatorname{tang} r' = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)};$$

$$5)\quad \sin r' = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{g'};$$

$$6)\quad \cos r' = \frac{g}{g'}$$

wo in den letzten beiden Formeln g' dieſelbe Funktion von $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}c$, wie g von $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}b$, $\sin\frac{1}{2}c$ iſt.

Zuſ. 1. Wird b oder c als Grundſeite genommen, ſo liegt das Dreieck zwiſchen den um $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$ und $(\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma})$ oder $(\alpha\beta\bar{\gamma})$ und $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma)$ beſchriebenen Kreiſen. Für die Radien r'', r''' derſelben iſt in obigen Formeln a mit b oder c zu vertauſchen.

Aus $\operatorname{tang} r' = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T}$; $\operatorname{tang} r'' = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}T}$;

$$\tang r''' = \frac{\tang \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} T}$$ folgt:

$$\frac{\tang r'}{\tang \frac{1}{2} a} = \frac{\tang r''}{\tang \frac{1}{2} b} = \frac{\tang r'''}{\tang \frac{1}{2} c}.$$

Zuſ. 2. Aus der merkwürdigen Formel $\tang r' = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T}$ iſt erſichtlich, daß durch zwei von den Größen T, a, r' die dritte beſtimmt wird. Daraus folgen die Sätze:

1) Dreiecke auf gleicher Grundſeite und zwiſchen gleichen Gegenkreiſen haben gleichen Flächenraum.

2) Dreiecke auf gleichen Grundſeiten und von gleichem Flächenraume liegen zwiſchen gleichen Gegenkreiſen.

3) Dreiecke von gleichem Flächenraume und zwiſchen gleichen Gegenkreiſen liegen auf gleichen Grundſeiten.

Die Formel $\sin \frac{1}{2} T = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\tang r'}$ iſt des Sinus wegen für T zweideutig, wie denn auch bei gegebener Grundſeite und gegebenen Gegenkreiſen zwei verſchiedene Dreiecke möglich ſind, die auf entgegengeſetzten Seiten der Grundſeite liegen, und von denen das eine $= \pi - U$, das andere $= \pi + U$ iſt, wo $U = (B + C - A)$. (g. S. §. 78, Zuſ. 2.)

Zuſ. 3. Die ſphäriſche Entfernung $\alpha\beta$ (Fig. 24.) der Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Dreieck liegt, iſt das Supplement des (ſphäriſchen) Durchmeſſers dieſer Kreiſe, oder der ſphäriſche Halbmeſſer derſelben iſt das Komplement der halben Entfernung. Wie bei ebnen Dreiecken der Abſtand der Parallelen, zwiſchen denen daſſelbe liegt, die Höhe des Dreieckes ausmacht; ſo kann der Analogie gemäß die ſphäriſche Entfernung der Gegenkreiſe eines ſphäriſchen Dreieckes die Höhe deſſelben genannt werden. Wird ſie mit h und zwar in Bezug auf die Grundſeite a mit h' bezeichnet, ſo iſt $r' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} h'$. Aus $\sin \frac{1}{2} T = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\tang r'}$ folgt dann der Ausdruck

$$\sin \frac{1}{2} T = \tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} h'$$

der eine merkwürdige Analogie der ſphäriſchen und der ebnen Dreiecke, bei denen $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}h'$ iſt, ausſpricht.

Wird b oder c als Grundſeite genommen und mit h'', h''' die zugehörige Höhe bezeichnet, ſo iſt:

$$\sin \tfrac{1}{2}T = \tang \tfrac{1}{2}a \tang \tfrac{1}{2}h' = \tang \tfrac{1}{2}b \tang \tfrac{1}{2}h''$$
$$= \tang \tfrac{1}{2}c \tang \tfrac{1}{2}h'''.$$

Zuſ. 4. Aus der Formel $\sin \frac{1}{2}T = \tang \frac{1}{2}a \tang \frac{1}{2}h'$ ergiebt ſich der Satz:

Sphäriſche Dreiecke haben gleichen Flächenraum, wenn die Produkte aus den Tangenten der halben Grundſeiten und Höhen gleich ſind; — oder: wenn die Tangenten der halben Grundſeiten ſich umgekehrt wie die der halben Höhen verhalten. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Flächenräume die der genannten Produkte oder die umgekehrte Proportionalität der Tangenten der halben Grundſeiten und Höhen.

Zuſ. 5. Da $\sin \frac{1}{2}T \leqq 1$ iſt, ſo muß immer $\tang \frac{1}{2}a \tang \frac{1}{2}h' \leqq 1$, alſo $(a + h') \leqq \pi$ ſein. Iſt $\sin \frac{1}{2}T = 1$, alſo $T = \pi$, ſo iſt $\tang \frac{1}{2}a = \cotg \frac{1}{2}h' = \tang \frac{1}{2}(\pi - h')$; alſo $a = \pi - h' = 2r'$. Daraus folgt, daß in jedem ſphäriſchen Dreiecke, welches den vierten Theil der Kugelfläche einnimmt, die Grundſeite ein Durchmeſſer der Gegenkreiſe iſt, zwiſchen denen das Dreieck liegt. Vergl. g. S. §. 78, Zuſ. 5.

Zuſ. 6. Sind a, a' die Grundſeiten; h, h' die Höhen zweier Dreiecke von gleichem Flächenraume, ſo folgen aus $\tang \frac{1}{2}a \tang \frac{1}{2}h = \tang \frac{1}{2}a' \tang \frac{1}{2}h'$ oder $\frac{\tang \frac{1}{2}a}{\tang \frac{1}{2}a'} = \frac{\tang \frac{1}{2}h'}{\tang \frac{1}{2}h}$ die Proportionen:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - a')}{\sin \frac{1}{2}(a + a')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(h' - h)}{\sin \frac{1}{2}(h' + h)};$$
$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - h')}{\sin \frac{1}{2}(a + h')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a' - h)}{\sin \frac{1}{2}(a' + h)}; \text{ (§. 2, 70.)}$$

§. 62.

Konſtruirt man die Gegenkreiſe des Dreieckes ABC (Fig. 25. a.), von denen der eine durch A, der andere durch B, C geht, deſſen Mittelpunkt M ſei und zieht die Radien MB, MC, ſo wie auf die Mitte D der Grundſeite BC das Perpendikel MD; ſo iſt nach g. S. §. 78 die Summe der Winkel MBD + MCD das Supplement des Flächenraumes von ABC, alſo der Winkel MBD das Komplement des halben Flächenraumes. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MDB ergeben ſich demgemäß außer der oben Zuſ. 3. angeführten Formel noch andere bemerkenswerthe Ausdrücke für den Flächenraum des ſphäriſchen Dreieckes, in welchen auch die Analogie deſſelben mit dem ebnen Dreiecke zum Theil noch vielſeitiger hervortritt.

Bezeichnet man in dem genannten Dreiecke den Radius MB wieder mit r'; MD mit q; BD mit $\frac{1}{2}$a und den Winkel BMC, der den relativen Werth des zugehörigen in d halbirten Nebenbogens BdC giebt, mit α, alſo den Winkel BMD, oder den relativen Werth von Bd mit $\frac{1}{2}\alpha$; ſo erhält man für den Winkel MBD die Gleichungen:

1) $\cos MBD = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\tan r'}$; 2) $\cos MBD = \cos q \sin \frac{1}{2}\alpha$;

3) $\sin MBD = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2} a}$; 4) $\sin MBD = \frac{\sin q}{\sin r'}$;

5) $\cot MBD = \tan \frac{1}{2}\alpha \cos r'$; 6) $\cot MBD = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tan q}$.

Setzt man hier $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}T)$ für MBD und $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h')$ für r'; ſo ergeben ſich für den Flächenraum T die Formeln:

1) $\sin \frac{1}{2} T = \tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} h'$;

2) $\sin \frac{1}{2} T = \sin \frac{1}{2}\alpha . \cos q$;

3) $\cos \frac{1}{2} T = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2} a}$;

4) $\cos \frac{1}{2} T = \frac{\sin q}{\cos \frac{1}{2} h'}$;

5) $\tan \frac{1}{2} T = \tan \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2} h$;

6) $\tang \frac{1}{2} T = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tang q}$;

Beſchreibt man um M als Pol einen Hauptkreis, der das über D und d verlängerte Perpendikel MD in E ſchneidet, die Seiten AB, AC aber in F, G halbirt*) (§. 58, Zuſ. 4.); ſo iſt das im Mittelpunkte der Grundſeite BC errichtete und bis zum Durchſchnitte mit dem die Mittelpunkte von AB, AC verbindenden Bogen fortgeſetzte Perpendikel DE das Komplement von DM, oder q. Wird daſſelbe mit p bezeichnet und zwar in Bezug auf die Grundſeite a mit p', verwandeln ſich die Formeln 2, 4, 6, in denen $(\frac{1}{2}\pi - p')$ für q ſubſtituirt werden, in folgende:

7) $\sin \frac{1}{2} T = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin p'$;

8) $\cos \frac{1}{2} T = \frac{\cos p'}{\cos \frac{1}{2} h'}$.

9) $\tang \frac{1}{2} T = \sin \frac{1}{2} a \tang p'$.

Die Formeln 7 und 9 ſind analog der Formel $\frac{1}{2} T = \frac{1}{2} a . p'$ bei ebnen Dreiecken, wenn p' das im Mittelpunkte der Grundſeite a errichtete und bis zu der durch die Mittelpunkte der Seiten b, c gezogenen Linie FG (Fig. 25. b.) fortgeſetzte

*) Trigonometriſch läßt ſich dieſer Satz ſo beweiſen. Man ziehe den Quadrant MF, ſo iſt in dem Dreiecke MBF

$$\cos MBF = \frac{\cos MF - \cos MB . \cos BF}{\sin MB . \sin BF}$$
$$= - \cotg MB . \cotg BF; \text{ weil } MF = \tfrac{1}{2}\pi.$$
$$= - \cotg . r' \cotg BF$$

Nun iſt $MBF = MBD + DBF = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} T + B$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi) + B$$
$$= \pi - \tfrac{1}{2}(A + C - B);$$

Daher $\cos \frac{1}{2}(A + C - B) = \cotg r' \cotg BF$.

Setzt man für $\cotg r'$ den Werth $\frac{\sin \frac{1}{2} T}{\tang \frac{1}{2} a} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\tang \frac{1}{2} a}$,

ſo erhält man $\cos \frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C)}{\tang \frac{1}{2} a \tang BF}$;

daher $\tang \frac{1}{2} a \tang BF = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos \frac{1}{2}(A + C - B)}$
$$= \tang \tfrac{1}{2} a \tang \tfrac{1}{2} c; \text{ (§. 31., V.)}.$$

Folglich $BF = \frac{1}{2} c$. Ebenſo folgt $CG = \frac{1}{2} b$.

Perpendikel DE bedeutet, das hier zugleich die halbe Höhe des Dreieckes mißt, was bei ſphäriſchen Dreiecken nicht der Fall iſt. Wie in ebnen Dreiecken die gerade Linie FG mit der Grundſeite BC parallel iſt, ſo iſt dies in ſphäriſchen wenigſtens mit dem Bogen FG und dem Nebenbogen BdC, deſſen relativer Werth in 7. enthalten iſt, der Fall.

Zuſ. Sind T', T'' die Flächenräume zweier Dreiecke zwiſchen gleichen Gegenkreiſen oder von gleicher Höhe h, deren Grundſeiten a', a'' ſind, ſo folgt aus:

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}T'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

$$\sin\tfrac{1}{2}T' + \sin\tfrac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(T'+T'')\cos\tfrac{1}{2}(T'-T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h; \quad (\varphi)$$

Ferner: $\sin\frac{1}{2}T' - \sin\frac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\frac{1}{2}a' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\frac{1}{2}h;$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(T'-T'')\cos\tfrac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h; \quad (\psi)$$

Daher wenn (φ) durch (ψ) dividirt wird:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}.$$

Sind die Grundſeiten gleich, die Höhen h', h'' ungleich, ſo erhält man:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'+h'')}{\sin\frac{1}{2}(h'-h'')}.$$

Aus der Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}h$ (5.) erhält man für die Dreiecke T', T'', deren Höhen gleich ſind:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''};$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(T'+T'')}{\sin\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}.$$

und wenn die Höhen h', h'' ungleich, aber $\alpha'=\alpha''$, alſo die Nebenbogen, deren ſphäriſche Sehnen die Grundſeiten ſind, ähnlich ſind:

$$\frac{\tang \tfrac{1}{2} T' + \tang \tfrac{1}{2} T''}{\tang \tfrac{1}{2} T' - \tang \tfrac{1}{2} T''} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} h' + \sin \tfrac{1}{2} h'}{\sin \tfrac{1}{2} h' - \sin \tfrac{1}{2} h''}$$

oder
$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(T' + T'')}{\sin \tfrac{1}{2}(T' - T'')} = \frac{\tang \tfrac{1}{2}(h' + h'')}{\tang \tfrac{1}{2}(h' - h'')}.$$

Aehnliche Proportionen laſſen ſich aus den übrigen Formeln dieſes §. herleiten.

§. 63.

Aufgabe. Es iſt ein ſphäriſches Dreieck gegeben; man ſoll einen Bogen konſtruiren, der dem Flächenraume des Dreieckes gleich iſt.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſei ABC (Fig. 26.). Man halbire alle Seiten deſſelben in D, E, F; errichte in dem Mittelpunkte der einen, etwa in D, ein Perpendikel und beſchreibe um B (oder C) mit dem Radius FE einen Kreis, der in G das Perpendikel ſchneide; ſo iſt DG dem halben Flächenraume des Dreieckes gleich. Die Verdoppelung dieſes Bogens giebt alſo den ganzen Flächenraum.

Beweis. In dem Dreiecke AFE, deſſen Seiten AF, AE $= \tfrac{1}{2}c$, $\tfrac{1}{2}b$ ſind und deſſen dritte Seite FE mit m bezeichnet ſei, iſt:

$$\cos m = \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c + \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A \quad (§.\ 12.)$$

Nach §. 37., 25. iſt nun:

$$\left.\begin{matrix}\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C) \\ \text{oder} \quad \cos \tfrac{1}{2} T\end{matrix}\right\} = \frac{\cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c + \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A}{\cos \tfrac{1}{2} a};$$

daher iſt $\cos \tfrac{1}{2} T = \dfrac{\cos m}{\cos \tfrac{1}{2} a}$.

Macht man alſo $\tfrac{1}{2}a$ zur Kathete und m zur Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreieckes, ſo iſt die andere Kathete $= \tfrac{1}{2}T$, woraus die Richtigkeit der Auflöſung erhellt.

Zuſ. 1. Im vorigen §. wurde die Formel $\cos \tfrac{1}{2} T = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}\alpha}{\cos \tfrac{1}{2} a}$ gefunden. Aus dieſer und der obigen $\cos \tfrac{1}{2} T = \dfrac{\cos m}{\cos \tfrac{1}{2} a}$ folgt, daß $m = \tfrac{1}{2}\alpha$ iſt.

Der Bogen alſo, welcher die Mittelpunkte zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes ver-

bindet, iſt gleich der Hälfte des Zentriwinkels, der auf der dritten (Grund-) Seite des Dreieckes als auf der zugehörigen Sehne in einem der Gegenkreiſe ſteht, zwiſchen denen das Dreieck liegt.

Oder: der genannte Bogen m iſt der Hälfte des relativen Werthes des Nebenbogens gleich, der, zu einem der Gegenkreiſe des Dreieckes gehörig, die Grundſeite desſelben umſpannt.

Zuſ. 2. Das Dreieck BDG iſt ſehr merkwürdig. Denn außer dem, daß die Kathete GD dem halben Flächenraume des Dreieckes ABC gleich iſt, iſt der Winkel an G dem Radius der Gegenkreiſe, zwiſchen denen das Dreieck in Rückſicht der Grundſeite BC liegt; und der Winkel an B dem in §. 62. erwähnten Perpendikel (p'), welches in der Mitte D der Grundſeite errichtet und bis an FE geführt wird, gleich; oder der Winkel GBD iſt das Komplement der Entfernung MD der Grundſeite BC von dem Mittelpunkte M des untern Gegenkreiſes. Denn es iſt:

$$\operatorname{tang} BGD = \frac{\operatorname{tang} BD}{\sin DG} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T} = \operatorname{tang} r'; \quad (§. 61.)$$

alſo Winkel BGD $= r'$.

Ferner iſt $\operatorname{tang} GBD = \frac{\operatorname{tang} GD}{\sin BD} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} a}$.

Nach §. 62, No. 9 iſt $\operatorname{tang} p' = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{2} a}$;

daher iſt Winkel GBD $= p' = \frac{1}{2}\pi - q$ (§. 62.)

$= \frac{1}{2}\pi - DM$.

Zuſ. 3. Das Dreieck MBG bietet den §. 45., Zuſ. 3. erwähnten Fall dar. Es iſt nämlich:

$GBD = \frac{1}{2}\pi - DM$; $DBM = \frac{1}{2}\pi - DG$;

daher $GBM = \pi - GM$;

$BG = BMD$;

$BM = BGM$.

§. 64.

Aufgabe. Aus einer Spitze eines ſphäriſchen Dreieckes nach der gegenüber liegenden Seite einen Bogen zu ziehen, durch welchen das Dreieck halbirt wird.

Auflöſung. (Fig. 27.a.) Um von der Spitze B (oder C) des Dreieckes ABC den verlangten Bogen zu ziehen, konſtruire man den Mittelpunkt M des durch B, C gehenden Gegenkreiſes; errichte im Endpunkte B des Radius MB ein Perpendikel BF und halbire den unterhalb der Grundſeite BC liegenden Winkel FBC durch den Bogen Bm, der in m das durch die Mitte D der Grundſeite geführte Perpendikel ſchneidet. Um den Gegenpunkt m′ dieſes Durchſchnittes beſchreibe man mit dem Radius Bm einen Kreis, der in E, G die Seiten AC, AB ſchneide; ſo leiſtet der von B nach E, ſo wie der von C nach G gezogene Bogen der Aufgabe Genüge.

Beweis. Der Winkel DBM iſt das Komplement des halben Flächenraumes von ABC, (g. S. §. 78.), alſo, wenn DBM + DCM wie an dem angemerkten Orte mit U, oder DBM mit $\frac{1}{2}$U, der Flächenraum ABC mit T bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}U$. Eben ſo iſt der Winkel mBD das Komplement des Flächenraumes des zwiſchen den um m, m′ beſchriebenen Gegenkreiſen liegenden Dreieckes BCE; alſo, wenn derſelbe mit $\frac{1}{2}U'$, der Flächenraum BCE mit T′ bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}U'$ oder $T' = \pi - U'$. Nun iſt $\frac{1}{2}U' = \frac{1}{2}FBD = \frac{1}{2}FBM + \frac{1}{2}MBD = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}U$; daher $U' = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}U$ und $\pi - U' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}T$; folglich iſt $T' = \frac{1}{2}T$.

Da das Dreieck BCG mit BCF zwiſchen einerlei Gegenkreiſen auf derſelben Grundſeite BC liegt, ſo iſt auch $BCG = \frac{1}{2}ABC$.

Zuſ. 1. In welchem Verhältniſſe die Abſchnitte AG, AE zu den Seiten AB, AC ſtehen, iſt §. 57. nachgewieſen worden.

Zuſ. 2. Nach der Formel $\tang r' = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T}$ (§. 61.) erhält man für den Radius Bm

$$\tang Bm = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T'} = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{4} T}.$$

Daraus ergiebt ſich die Gleichung zwiſchen Bm und r', (wenn nämlich BM durch r' bezeichnet wird),

$$\frac{\tang Bm}{\tang r'} = \frac{\sin \frac{1}{2} T}{\sin \frac{1}{4} T} = 2 \cos \frac{1}{4} T;$$

oder $\tang Bm = 2 \cos \frac{1}{4} T \tang r'$.

Für den Bogen Dm, durch welchen die Lage von m beſtimmt wird, erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke BDm die Formel:

$$\begin{aligned} \tang Dm &= \tang mBD . \sin BD \\ &= \tang \tfrac{1}{2} U' . \sin \tfrac{1}{2} a \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tang \frac{1}{2} T'} = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tang \frac{1}{4} T}. \end{aligned}$$

Setzt man für $\sin \frac{1}{4} T$, $\tang \frac{1}{4} T$ die §. 41. angeführten Werthe, ſo erhält man durch die Seiten des Dreieckes ABC ausgedrückt:

$$\tang Bm = \tang \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{4}(a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a+b-c) \sin \frac{1}{4}(a+c-b) \sin \frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

$$\tang Dm = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sqrt{\tang \frac{1}{4}(a+b+c) \tang \frac{1}{4}(a+b-c) \tang \frac{1}{4}(a+c-b) \tang \frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

Zuſ. 3. Aendert man beliebig die Lage des Punktes m auf dem Perpendikel mDm', ſo ändert ſich dabei die Lage von m' und E, ſo wie der Inhalt T' des Dreieckes BCE. Indeß ſind für jede Lage die Gleichungen:

$$\tang Dm = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tang \frac{1}{2} T'};$$

$$\tang Bm = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T'};$$

gültig. Soll nun allgemein $T' = \frac{n}{m} T$ ſein, ſo erhält man

durch dieſe Gleichungen die nöthigen Beſtimmungen für Dm und Bm, von denen die Konſtruktion des dieſer Theilung des Dreieckes ABC entſprechenden Durchſchnittes E abhängt. Es wird nämlich:

$$\tang Dm = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\tang (\frac{n}{2m} T)};$$

$$\tang Bm = \frac{\tang \frac{1}{2} a}{\sin (\frac{n}{2m} T)}.$$

§. 65.

Aufgabe. Ein gegebenes ſphäriſches Dreieck in ein ſphäriſches Parallelogramm zu verwandeln.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſei ABC (Fig. 27. b.) Man halbire daſſelbe durch den Bogen AD und beſchreibe auf der andern Seite von AC das Dreieck ACE ſo, daß AE = DC; EC = AD genommen wird, ſo iſt das Parallelogramm ADCE dem Dreiecke ABC gleich.

Beweis. Das Dreieck ACE iſt gleich dem Dreiecke ADC, weil alle Seiten in beiden Dreiecken bezüglich gleich ſind; daher iſt ACE auch = ADB und ADCE = ABC. Ein ſphäriſches Parallelogramm iſt aber das Viereck ADCE, weil je zwei einander gegenüber liegenden Seiten gleich ſind (g. S. §. 96.).

Zuſ. Soll das Parallelogramm mit dem Dreiecke gleiche Grundſeite AC haben, ſo konſtruire man das Dreieck ADF, ſo daß AF = DC, FD = AC genommen wird.

§. 66.

Aufgabe. Den Flächenraum eines ſphäriſchen Parallelogrammes auszudrücken.

Auflöſung. 1) Es ſei ABCD (Fig. 28.) ein ſphäriſches Parallelogramm. Zieht man in demſelben eine Diagonale AB, ſo iſt das Dreieck ABC die Hälfte des Paral-

lelogrammes und hat mit demſelben gleiche Grundſeite BC, die mit a bezeichnet ſei, und gleiche Höhe h, da beide zwiſchen denſelben Gegenkreiſen liegen. Aus der Formel $\sin\frac{1}{4}T = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}h$ erhält man alſo für das Parallelogramm, deſſen Flächenraum mit P bezeichnet ſei, die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \tang\tfrac{1}{2}a\,\tang\tfrac{1}{2}h.\quad (1.)$$

2) Für den Flächenraum des Dreieckes ABC hat man nach §. 41. die Formel:

$$\cotg\tfrac{1}{2}T = \frac{\cotg\frac{1}{2}BC\cotg\frac{1}{2}AC + \cos ACB}{\sin ACB},$$

oder, wenn BC, AC, ACB durch a, b, C ausgedrückt werden, $\cotg\frac{1}{2}T = \frac{\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}$;

Daher iſt: $\cotg\frac{1}{4}P = \frac{\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}$. (2.)

Eben ſo iſt: $\cotg\frac{1}{4}P = \frac{\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos B}{\sin B}$

wenn durch B der Winkel DBC bezeichnet wird.

3) Aus $\frac{\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C} = \frac{\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos B}{\sin B}$

folgt

$(\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos C)\sin B = (\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b + \cos B)\sin C$;

hieraus

$$\cotg\tfrac{1}{2}a\cotg\tfrac{1}{2}b\,(\sin B - \sin C) = \sin C\cos B - \cos C\sin B;$$
$$= \sin(C - B);$$

oder $\quad -\cotg\frac{1}{2}a\cotg\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C+B)\sin\frac{1}{2}(C-B)$

$$= \cos\tfrac{1}{2}(C-B)\sin\tfrac{1}{2}(C-B)$$

daher $\quad -\cos\frac{1}{2}(C+B) = \tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C-B)$. ($\varphi$)

Nun iſt $P = A + B + C + D - 2\pi$, oder, da $A = B$, $C = D$ iſt, $P = 2(C+B) - 2\pi$;

mithin $\frac{1}{4}P = \frac{1}{2}(C+B) - \frac{1}{2}\pi$

und $\sin\frac{1}{4}P = -\cos\frac{1}{2}(B+C)$;

Daher erhält man aus (φ) die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \tang\tfrac{1}{2}a\,\tang\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(C-B).\quad (3.)$$

Anmerk. Bei ebnen Parallelogrammen iſt ebenfalls $P = ab \cos \frac{1}{2}(C - B)$. Da indeß hier $C + B = \pi$ iſt, ſo wird $\cos \frac{1}{2}(C - B) = \sin B = \sin C$.

4) Von den Gegenkreiſen, zwiſchen denen das Parallelogramm liegt, habe der durch B, C gehende ſeinen Mittelpunkt in M. Wie der Winkel MBC das Komplement des halben Flächenraumes ABC, oder die Summe MBC + MCB das Supplement des ganzen Flächenraumes ABC iſt, ſo iſt dieſelbe Winkelſumme das Supplement des halben Parallelogrammes, oder der Winkel MBC das Komplement des vierten Theiles von ABCD. Der um M beſchriebene Hauptkreis HFG halbirt nach §. 62. ſowohl die Seiten AB, AC des Dreieckes ABC, als AB, DB des Dreieckes BDA und DC, DB des Dreieckes BCD; daher halbirt er die einander gegenüber ſtehenden Seiten AC, BD des Parallelogrammes und geht durch den Durchſchnittspunkt I der Diagonale, der zugleich der Mittelpunkt von GH iſt, weil nach §. 63. Zuſ. 1. ſowohl IH als IG der Hälfte des Zentriwinkels BMC gleich iſt. Daraus ergiebt ſich auch, daß GH = BMC iſt. Bezeichnen wir alſo BMC wieder mit α, wodurch zugleich der relative Werth des Nebenbogens BC ausgedrückt wird, ſo iſt α = GH, alſo der Bogen GH ähnlich dem Nebenbogen BC. Das von M auf die Mitte von BC gefällte Perpendikel ME treffe verlängert den Bogen GH in F. Die Verlängerung EF deſſelben iſt für das Parallelogramm derſelbe Bogen, wie das §. 62. erwähnte Perpendikel DE des Dreieckes ABC Fig. 25. a. und werde hier ebenfalls mit p bezeichnet. Indem alſo die Größen a, α, h, p hier dieſelbe Bedeutung haben, wie §. 62., laſſen ſich die dort für den Flächenraum des Dreieckes entwickelten Formeln ſogleich auf das Parallelogramm übertragen. Außer der ſchon in (1.) bemerkten erhält man alſo noch:

$$\sin \tfrac{1}{4} P = \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin p; \quad (4.)$$

$$\cos \tfrac{1}{4} P = \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} a}; \quad (5.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}P = \frac{\cos p}{\cos\tfrac{1}{2}h}; \quad (6.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}h. \quad (7.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \sin\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang} p. \quad (8.)$$

Zuſ. 1. Aus den Formeln $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h$ und $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}(C-B)$ folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(C-B) \text{ oder}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b}.$$

Zieht man in dem Gegenkreiſe BCD'A' (Fig. 29.) des Parallelogrammes ABCD den Radius MB und verlängert DB über B hinaus, ſo iſt der Winkel $MBD' = \frac{1}{2}(C-B)$. Denn da D' der Gegenpunkt von D iſt, ſo iſt $BD' = \pi - BD = \pi - b$. Fällt man von dem Mittelpunkte M auf die Sehne BD' das Perpendikel ML, ſo iſt $BL = \frac{1}{2}BD' = \frac{1}{2}(\pi - b)$. In dem rechtwinkligen Dreiecke MLB, deſſen Hypotenuſe $MB = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$ iſt (§. 61, Zuſ. 3.), iſt nun:

$$\cos MBL = \frac{\operatorname{tang} BL}{\operatorname{tang} MB} = \frac{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}b)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$$

Daher iſt $\cos MBL = \cos\frac{1}{2}(C-B)$ und $MBL = \frac{1}{2}(C-B)$.

Daſſelbe ergiebt ſich aus folgender Betrachtung: der Winkel MBC ſei mit u', MCB mit u'', MBD' mit v' und der durch Verlängerung von AC gebildete Winkel MCA', mit v'' bezeichnet. Nach No. 3. und 4. dieſes §. iſt nun:

$$C + B = \pi + \tfrac{1}{2}P;$$

und $\quad u' + u'' = \pi - \frac{1}{2}P;$

daher $\quad C + B + u' + u'' = 2\pi;$

Ferner iſt $\quad B + u' + v' = \pi; \quad (\alpha)$

und $\quad C + u'' - v'' = \pi; \quad (\beta)$

weil B, C die Nebenwinkel von $(u' + v')$, $(u'' - v'')$ ſind.

Daher iſt $B + C + u' + u'' + v' - v'' = 2\pi = B + C + u' + u''$;

folglich ...... $v' - v'' = 0$ oder $v' = v''$.

Subtrahirt man nun die Gleichung (α) von (β), ſo iſt:

$$C - B + u'' - u' - v' - v'' = 0$$

folglich, da $v' = v''$ und auch $u'' = u'$ iſt,

$$C - B = 2v' \text{ oder } \tfrac{1}{2}(C - B) = v'.$$

Hieraus läßt ſich wieder die Formel No. 3. herleiten. Denn zieht man ME ⊥ BC, ſo iſt:

$$\cos u' = \frac{\text{tang BE}}{\text{tang BM}} \text{ oder } \sin \tfrac{1}{4}P = \frac{\text{tang} \tfrac{1}{2}a}{\text{tang r}}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MLB folgt aber

$$\text{tang MB} = \frac{\text{tang BL}}{\cos v'} \text{ oder}$$

$$\text{tang r} = \frac{\text{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}b)}{\cos \tfrac{1}{2}(C - B)} = \frac{1}{\text{tang} \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}(C - B)}.$$

Dies ſubſtituirt giebt $\sin \tfrac{1}{4}P = \text{tang} \tfrac{1}{2}a \, \text{tang} \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}(C - B)$.

Zuſ. 2. Gehen die Seiten DB, AC des Parallelogrammes verlängert durch die Mittelpunkte M, M' der Gegenkreiſe, die durch B, C und A, D geführt werden; ſo ſind die Seiten AC, BD der Höhe des Parallelogrammes gleich, alſo b = h. Dann iſt zugleich das Parallelogramm ein gleichwinkliges und das größte, welches die Seiten a, b zulaſſen; es entſpricht alſo ganz dem ebnen Rechtecke. Die Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{4}P = \text{tang} \tfrac{1}{2}a \, \text{tang} \tfrac{1}{2}h;$$

$$\sin \tfrac{1}{4}P = \text{tang} \tfrac{1}{2}a \, \text{tang} \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}(C - B);$$

geben für den Flächenraum dieſes ſphäriſchen Rechteckes aus den Seiten a, b den Ausdruck:

$$\sin \tfrac{1}{4}P = \text{tang} \tfrac{1}{2}a \, \text{tang} \tfrac{1}{2}b,$$

der eben ſo analog der für das ebne Rechteck gültigen Formel $P = ab$ iſt.

Sind die Seiten a, b des ſphäriſchen Rechteckes gleich, ſo erhält man ein ſphäriſches Quadrat und für den Flächenraum deſſelben die Formel:

$$\sin \tfrac{1}{4}P = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}a.$$

Zuſ. 3. Da die Winkel A, B, C, D des ſphäriſchen Rechteckes gleich ſind, ſo iſt $P = 4A - 2\pi$; oder $\tfrac{1}{4}P = A - \tfrac{1}{2}\pi$; folglich $\sin \tfrac{1}{4}P = -\cos A$. Aus $\sin \tfrac{1}{4}P =$

$\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b$ folgt alſo $\cos A = -\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} b$. Für den Winkel A des ſphäriſchen Quadrates erhält man:

$$\cos A = -\tang^2 \frac{1}{2} a.$$

Da das ſphär. Quadrat gleichſeitig und gleichwinklig iſt, ſo iſt auch das Polarviereck deſſelben gleichwinklig und gleichſeitig, alſo ein Quadrat. Die Seite deſſelben iſt $\bar{A}$, der Winkel $\bar{a}$. Aus $\cos A = -\tang^2 \frac{1}{2} a$ folgt alſo für das Polarquadrat

$$\cos \bar{a} = -\tang^2 \frac{1}{2} \bar{A},$$

und daraus $\tang^2 \frac{1}{2} A \cos a = 1$.

was auch aus $\cos A = -\tang^2 \frac{1}{2} a$ unmittelbar entwickelt werden kann.

§. 67.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Parallelogramm zu konſtruiren, deſſen Grundſeite nebſt einem daran liegenden Winkel gegeben iſt, und das gleichen Flächenraum mit einem gegebenen Parallelogramme hat.

Auflöſung. Das gegebene Parallelogramm ſei ABA'B' (Fig. 30.), die gegebene Grundſeite AC. Der durch A, B gehende Gegenkreis des Parallelogrammes ABA'B' habe ſeinen Mittelpunkt in M. Man halbire AC in E und errichte ein Perpendikel EN; verlängere den Radius AM bis zu dem Durchſchnitte mit dem Perpendikel in N; beſchreibe um den Gegenpunkt N' dieſes Durchſchnittes mit dem Radius AN einen Kreis; ziehe AF unter dem gegebenen Winkel bis zum Durchſchnitte F mit jenem Kreiſe und vollende das Parallelogramm ACGF, welches der Aufgabe genügt.

Beweis. Der Flächenraum von ABA'B' ſei mit P, der von ACGF mit P'; die Grundſeite AB mit a, AC mit a'; die Höhen der genannten Parallelogramme mit h, h' bezeichnet. Nach §. 66. iſt $\sin \frac{1}{4} P = \tang \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2} h$; $\sin \frac{1}{4} P' = \tang \frac{1}{2} a' \tang \frac{1}{2} h'$. Zieht man MD $\perp$ AB, ſo iſt in den rechtwinkligen Dreiecken MAD, NAE

$$\cos DAM = \frac{\tang AD}{\tang AM} = \frac{\tang AE}{\tang AN}$$

folglich, da $AM = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$; $AN = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h'$ iſt,

$$\tang \tfrac{1}{2} a \tang \tfrac{1}{2} h = \tang \tfrac{1}{2} a' \tang \tfrac{1}{2} h';$$

woraus $\sin \frac{1}{4} P = \sin \frac{1}{4} P'$, alſo $P = P'$ folgt.
Kürzer erhält man den Beweis daraus, daß Winkel DAM $= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}P$; EAN $= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}P'$ iſt.

Zuſ. 1. Eben ſo wird ein ſphäriſches Dreieck konſtruirt, deſſen Grundſeite nebſt einem anliegenden Winkel gegeben iſt, und das mit einem gegebenen Dreiecke gleichen Flächenraum hat.

Zuſ. 2. Wird die Bedingung, daß das zu konſtruirende Parallelogramm an der Grundſeite einen gegebenen Winkel habe, mit der andern, daß daſſelbe ein ſphäriſches Rechteck ſei, vertauſcht; ſo ändert ſich die angegebene Konſtruktion dahin ab, daß für AF die Verlängerung AH des Radius NA bis zu dem um N' beſchriebenen Kreiſe genommen und das dadurch beſtimmte Parallelogramm ACHI vollendet wird.

§. 68.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Quadrat zu konſtruiren, deſſen Seite gegeben iſt.

Auflöſung. Es ſei CD (Fig. 31.) die Seite des zu konſtruirenden Quadrates. Um C und D beſchreibe man mit dem Radius $= \frac{1}{2}(\pi - CD)$ zwei Bogen, die ſich in M ſchneiden; ziehe die Bogen MC, MD die ſich verlängert in M', dem Gegenpunkte von M ſchneiden; beſchreibe um M' mit dem Radius = MC einen Nebenkreis, der die Spindel MCDM' in G, H ſchneidet und ziehe GH —; ſo iſt CDGH ein ſphäriſches Quadrat.

Beweis. Wegen Gleichheit der Dreiecke MCD, M'GH iſt GH = CD. Da MC, MD $= \frac{1}{2}(\pi - CD)$, und M'G, M'H = MC, MD iſt, ſo iſt GC $= \pi - (MC + M'G) =$ CD und eben ſo HD = CD; mithin das Viereck CDGH gleichſeitig. Da ferner in den Dreiecken MCD, M'GH die Win-

kel an C, D, G, H unter ſich gleich ſind, ſo ſind die Nebenwinkel derſelben in dem Vierecke CDGH gleich. Daher iſt CDGH gleichſeitig und gleichwinklig, alſo ein ſphäriſches Quadrat.

Zuſ. Iſt der Winkel eines ſphäriſchen Quadrates gegeben, ſo hat man in dem Supplemente deſſelben die Seite des Polarquadrates. Man kann alſo jenes Quadrat konſtruiren, wenn zuvor das Polarquadrat verzeichnet worden iſt.

§. 69.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Rechteck in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln.

Auflöſung. Um das ſphäriſche Rechteck ABCD (Fig. 32.) in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln, verlängere man AB über B, ſo daß die Verlängerung BE=BC wird; die Summe AE halbire man in M und beſchreibe um M mit dem Radius AM einen Kreis; errichte in B ein Perpendikel auf dem Durchmeſſer AE, welches die Peripherie des Kreiſes in F trifft; — ſo iſt BF die Seite des ſphäriſchen Quadrates, das mit ABCD gleichen Flächenraum hat. Die Konſtruktion deſſelben iſt nach vorigem §. auszuführen.

Beweis. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Rechteckes ABCD mit P, den des Quadrates der Seite BF mit Q; ſo iſt $\sin\frac{1}{4}P = \tang\frac{1}{2}AB \tang\frac{1}{2}BC$; und $\sin\frac{1}{4}Q = \tang^2\frac{1}{2}BF$ (§. 66, Zuſ. 2.).

Nach §. 54, Zuſ. 4. iſt nun:
$\tang^2\frac{1}{2}BF = \tang\frac{1}{2}AB \tang\frac{1}{2}BF = \tang\frac{1}{2}AB \tang\frac{1}{2}BC$; folglich $\sin\frac{1}{4}Q = \sin\frac{1}{4}P$; woraus $Q = P$ folgt.

Zuſ. 1. Da im Allgemeinen $\sin\frac{1}{4}P < 1$ iſt, ſo iſt $\tang\frac{1}{2}AB . \tang\frac{1}{2}BC < 1$; folglich $AB + BC$ oder $AE < \pi$. Daher iſt AM im Allgemeinen $< \frac{1}{2}\pi$, wie dies bei Nebenkreiſen vorausgeſetzt wird. Ausgenommen iſt der eine Fall, wenn $\sin\frac{1}{4}P = 1$ iſt. Dann iſt $\tang\frac{1}{2}AB \tang\frac{1}{2}BC = 1$, folglich $AE = \pi$; $AM = \frac{1}{2}\pi$ und der Kreis AFE ein Hauptkreis. Indem dann das Perpendikel FB ein Quadrat wird,

iſt der Umfang des Quadrates ſo wie der des Rechteckes einem Hauptkreiſe gleich, während jedes dieſer Vierecke zugleich die halbe Kugelfläche einnimmt. Hieraus läßt ſich ſchließen, daß in dieſem Falle das Rechteck, wie das Quadrat, einen Hauptkreis bildet und alſo aufhört ein Viereck zu ſein.

Aus §. 61., Zuſ. 5. geht dies evident hervor. Denn zieht man in dem Rechtecke, wie in dem Quadrate eine Diagonale, ſo ſind in den dadurch entſtandenen Dreiecken die Grundſeiten reſpektive Durchmeſſer der Gegenkreiſe, zwiſchen denen die Dreiecke liegen. Die an dieſe Grundſeiten ſich anſchließenden Seiten des Rechteckes und des Quadrates ſind dann aber nichts anderes, als die Verlängerungen der Grundſeiten; mithin wird aus jedem Vierecke ein Hauptkreis. Vergl. §. 62, Zuſ. 2. und §. 68.

Zuſ. 2. Um ein beliebiges ſphäriſches Polygon in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln, verwandle man das Polygon in ein Dreieck (g. S. §. 84.); das Dreieck in ein Parallelogramm (§. 65.), dies in ein Rechteck und das Rechteck in ein Quadrat.

§. 70.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines ſphäriſchen Trapezes auszudrücken.

Auflöſung. Man zerlege das Trapez ABCD (Fig. 33.) durch eine Diagonale AD in zwei Dreiecke, deren Grundſeiten AB, CD — zugleich die Grundſeiten des Trapezes, d. h. diejenigen Seiten, welche Sehnen zweier Gegenkreiſe ſind — mit a′, a″, deren Flächenräume mit T′, T″ bezeichnet ſeien. Da beide Dreiecke zwiſchen denſelben Gegenkreiſen liegen, alſo gleiche Höhe h haben; ſo erhält man 1) aus der Formel: $\sin\frac{1}{2}T = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}h$ (§. 62.)

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \tang\tfrac{1}{2}a' \tang\tfrac{1}{2}h;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}T'' = \tang\tfrac{1}{2}a'' \tang\tfrac{1}{2}h;$$

daher $\sin\frac{1}{2}T' + \sin\frac{1}{2}T'' = (\tang\frac{1}{2}a' + \tang\frac{1}{2}a'')\tang\frac{1}{2}h;$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')\,\text{tang}\,\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.$$

Aus der Formel $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}$ (§. 62.) erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}T' + \cos\tfrac{1}{2}T'' = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'}{\cos\frac{1}{2}a'} + \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha''}{\cos\frac{1}{2}a''},$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'\cos\frac{1}{2}a'' + \cos\frac{1}{2}\alpha''\cos\frac{1}{2}a'}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''};$$

wo α', α'' die relativen Werthe der zu den Sehnen a', a' gehörigen **Nebenbogen** AB, CD ſind.

Hieraus folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T' + \sin\frac{1}{2}T''}{\cos\frac{1}{2}T' + \cos\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')\,\text{tang}\,\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}\alpha'' + \cos\frac{1}{2}a''\cos\frac{1}{2}\alpha'};$$

oder $\text{tang}\,\frac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')\,\text{tang}\,\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}\alpha'' + \cos\frac{1}{2}a''\cos\frac{1}{2}\alpha'}$;

für unendlich kleine Trapeze erhält man hieraus die planimetriſche Formel: $\frac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\frac{1}{2}(a''+a'')\frac{1}{2}h}{2}$

oder $(T'+T'') = \frac{(a'+a'')h}{2}$;

2) Aus der Formel $\text{tang}\,\frac{1}{2}T = \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}h$ (§. 62, No. 5.) erhält man:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}T' + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}T'' = (\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha' + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha'')\sin\tfrac{1}{2}h;$$

oder $\frac{\sin\frac{1}{2}(T'+T'')}{\cos\frac{1}{2}T'\cos\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')\sin\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}\alpha'\cos\frac{1}{2}\alpha''}$;

Nach der oben angezogenen Formel iſt nun:

$$\cos\tfrac{1}{2}T'\cos\tfrac{1}{2}T'' = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'}{\cos\frac{1}{2}a'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha''}{\cos\frac{1}{2}a''};$$

daher $\sin\frac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')\sin\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}$.

Beſchreibt man um die Pole M, M' der Gegenkreiſe, zwiſchen denen das Trapez liegt, den Hauptkreis FEG, der in den genannten Punkten die Seiten AC, AD, BD halbirt (§. 58, Zuſ. 4.; §. 62.); ſo iſt FE$=\frac{1}{2}\alpha''$; EG$=\frac{1}{2}\alpha'$ (§. 63, Zuſ. 1.); folglich $\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')$=FG. Bezeichnen wir dieſen

die Seiten AC, BD des Trapezes halbirenden Bogen FG mit m, ſo iſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin m \sin\frac{1}{2} h}{\cos\frac{1}{2} a' \cos\frac{1}{2} a''}.$$

Zuſ. Aus der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2} T' + \sin\tfrac{1}{2} T'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a')\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} h}{\cos\frac{1}{2} a' \cos\frac{1}{2} a''}$$

erhält man für das Trapez die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} h}{2\cos\frac{1}{2}(T'-T'')\cos\frac{1}{2} a' \cos\frac{1}{2} a''};$$

Aus welcher die Formeln für das Parallelogramm und das Dreieck ſich herleiten laſſen. Setzt man nämlich $a''=a'$; da dann auch $T''=T'$ wird, ſo erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2} P = \frac{\sin a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} h}{2\cos^2\frac{1}{2} a} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2} a\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2} h.$$

Setzt man $a''=0$, wodurch auch $T''=0$ wird, ſo erhält man $\sin\frac{1}{2} T = \frac{\sin\frac{1}{2} a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} h}{2\cos\frac{1}{2} T \cos\frac{1}{2} a}$; woraus

$\sin\frac{1}{2} T = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2} a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2} h$ folgt.

Vom eingeſchriebenen Vierecke.

§. 71.

Aufgabe. Die Diagonalen des in einem Nebenkreiſe beſchriebenen ſphäriſchen Viereckes durch die Seiten deſſelben auszudrücken.

Auflöſung. In dem Nebenkreiſe ABCD (Fig. 34.), deſſen Mittelpunkt M iſt, ſei das ſphäriſche Viereck ABCD beſchrieben. Die Seiten DA, AB, BC, CD deſſelben ſeien der Reihe nach durch a, b, c, d; die zu denſelben gehörigen Zentriwinkel DMA, AMB, BMC, CMD durch α, β, γ, δ bezeichnet, wodurch zugleich die relativen Werthe der Nebenbogen DA, AB, BC, CD ausgedrückt werden. Die Diagonalbogen AC, BD ſeien durch p, q angedeutet, der ſphäriſche Radius des Kreiſes durch r. Wie nun nach §. 54, Zuſ. 1.

$\sin\frac{1}{2}a = \sin r \sin\frac{1}{2}\alpha$; $\sin\frac{1}{2}b = \sin r \sin\frac{1}{2}\beta$;
$\sin\frac{1}{2}c = \sin r \sin\frac{1}{2}\gamma$; $\sin\frac{1}{2}d = \sin r \sin\frac{1}{2}\delta$;

iſt, ſo iſt auch

$$\sin\tfrac{1}{2}p = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma); \quad (1.)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}q = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta); \quad (2.)$$

daher $\sin\frac{1}{2}p \sin\frac{1}{2}q = \sin^2 r \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$;
$= \sin^2 r(\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma))$; (§. 3, 1.)
Nun iſt $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$, alſo $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \pi - \frac{1}{2}\delta$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\frac{1}{2}\delta$; folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}p \sin\tfrac{1}{2}q = \sin^2 r (\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\delta);$$
$$= \sin r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \sin r \sin\tfrac{1}{2}\gamma + \sin r \sin\tfrac{1}{2}\beta \,.\, \sin r \sin\tfrac{1}{2}\delta;$$

mithin, wenn für $\sin r \sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin r \sin\frac{1}{2}\gamma$, u. ſ. w. $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}c$ u. ſ. w. geſetzt wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}p \sin\tfrac{1}{2}q = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}d. \quad (3.)$$

Aus (1) und (2) folgt ferner:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}; \quad (§. 3, 5.)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta};$$

Subſtituirt man hier für $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$ u. ſ. w. die Werthe $\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin r}$, $\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin r}$ u. ſ. w. ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}d}{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}d}; \quad (4.)$$

Wird (3.) durch (4.) dividirt und multiplizirt, ſo ergiebt ſich

$$\sin^2\tfrac{1}{2}p = \frac{(\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}d)(\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}d)}{\sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d \sin\frac{1}{2}a};$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}q = \frac{(\sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d \sin\frac{1}{2}a)(\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}d)}{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}d};$$

Zuſ. 1. Bezeichnet man der Kürze wegen den Faktor:
$(\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}d)$ mit z;
$(\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}d)$ mit z';
$(\sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d \sin\frac{1}{2}a)$ mit z'';

ſo iſt: $\sin^2\frac{1}{2}p = \frac{z'}{z''}\cdot z$; und $\sin^2\frac{1}{2}q = \frac{z''}{z'}\cdot z$.

$$\sin\tfrac{1}{2}p \sin\tfrac{1}{2}q = z; \quad \frac{\sin\frac{1}{2}p}{\sin\frac{1}{2}q} = \frac{z'}{z''}.$$

Wird jede Seite des Viereckes mit der nächſtfolgenden, a mit b, b mit c u. ſ. w. vertauſcht; ſo verwandelt ſich z′ in z″, p in q; z bleibt unverändert. Daſſelbe findet ſtatt, wenn jede Seite mit der vorhergehenden, a mit d, b mit a u. ſ. w. vertauſcht wird.

Zuſ. 2. Die Größen z, z′, z″ laſſen ſich noch umformen. Es iſt nämlich:

$$z = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}d;$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c) - \cos\frac{1}{2}(a+c)}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(b-d) - \cos\frac{1}{2}(b+d)}{2}; \text{ (§. 2, 42.)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c) - \cos\frac{1}{2}(b+d)}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(b-d) - \cos\frac{1}{2}(a+c)}{2};$$

$$z = \sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d) +$$
$$\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d); \text{ (§. 2, 46.)}$$

Bezeichnet man die Faktoren

$\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$, $\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)$, $\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)$, $\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)$ der Reihe nach mit $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$, $\overset{3}{S}$, $\overset{4}{S}$,

ſo iſt $z = \overset{1}{S}\,\overset{3}{S} + \overset{2}{S}\,\overset{4}{S}$;

Vertauſcht man in z die Seite c mit b und demgemäß die Marke (³) mit (²), ſo erhält man z′; nämlich:

$$z' = \overset{1}{S}\,\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}.$$

Wird in z′ jede Seite mit der folgenden verwechſelt, ſo ergiebt ſich:

$$z' = \overset{2}{S}\,\overset{3}{S} + \overset{4}{S}\,\overset{1}{S}.$$

Aus obiger Gleichung:

$$z = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c) - \cos\frac{1}{2}(a+c)}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(b-d) - \cos\frac{1}{2}(b+d)}{2}$$

erhält man durch veränderte Zuſammenſtellung:

$$z = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c) + \cos\frac{1}{2}(b-d)}{2} - \frac{\cos\frac{1}{2}(a+c) + \cos\frac{1}{2}(b+d)}{2};$$

daher $z = \cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d) -$
$\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)$; (§. 2, 45.)
Die Faktoren $\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)$, $\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)$, $\cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)$, $\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d)$ mögen der Reihe nach durch K, $\overset{12}{K}$, $\overset{13}{K}$, $\overset{14}{K}$, angedeutet werden. Die übrigen Verbindungen dieſer Art, $\cos\frac{1}{4}(-a+b+c-d)$, $\cos\frac{1}{4}(-a+b-c+d)$, $\cos\frac{1}{4}(-a-b+c+d)$ würden demgemäß durch $\overset{23}{K}$, $\overset{24}{K}$, $\overset{34}{K}$ zu bezeichnen ſein. Da jedoch die in $\overset{23}{K}$, $\overset{24}{K}$, $\overset{34}{K}$ enthaltenen Bogen entgegengeſetzt ſind den in $\overset{14}{K}$, $\overset{13}{K}$, $\overset{12}{K}$ enthaltenen, was auf die Koſinus keinen Einfluß hat; ſo iſt $\overset{23}{K} = \overset{14}{K}$; $\overset{24}{K} = \overset{13}{K}$; $\overset{34}{K} = \overset{12}{K}$ und man kann ſich auf $\overset{12}{K}$, $\overset{13}{K}$, $\overset{14}{K}$ beſchränken. Nach dieſer Bezeichnung iſt:

$$z = \overset{12}{K}\,\overset{14}{K} - K\,\overset{13}{K}.$$

Da z in z' übergeht; wenn man b mit c verwechſelt, ſo erhält man, indem auch die Marke ^{2} mit ^{3} vertauſcht wird:

$$z' = \overset{13}{K}\,\overset{14}{K} - K\,\overset{12}{K}.$$

Ferner verwandelt ſich z' in z'', wenn jede Seite mit der folgenden vertauſcht wird; dies giebt:

$$z'' = \overset{24}{K}\,\overset{21}{K} - K\,\overset{23}{K} = \overset{12}{K}\,\overset{13}{K} - K\,\overset{14}{K}.$$

Zuſ. 3. Fällt man von dem Mittelpunkte M des Kreiſes ein Perpendikel ME auf die Sehne AD, die dadurch halbirt wird, ſo iſt in dem rechtwinkligen Dreiecke MED

$$\cos EMD = \frac{\tang EM}{\tang MD}$$

oder
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tang EM}{\tang r}.$$

Werden alſo die Entfernungen der Seiten a, b, c, d vom Mittelpunkte des umgeſchriebenen Kreiſes d. h. die Perpendikel von M auf a, b, c, d reſp. durch e', e'', e''', e'''' bezeichnet, ſo iſt:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tang e'}{\tang r};\quad \cos\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\tang e''}{\tang r};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{tang} e'''}{\operatorname{tang} r}; \quad \cos\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} r}.$$

Aus
$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta - \cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}; \text{ (§. 2, 5.)}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta}$$

erhält man daher:
$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''} \quad (\varphi)$$

Und aus $\sin\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}q = \sin^2 r \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$
$$= \sin^2 r(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)) \text{ (§. 3, 2.)}$$
$$= \sin^2 r(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\delta)$$

ergiebt ſich:
$$\sin\tfrac{1}{2}p\sin\tfrac{1}{2}q = \cos^2 r(\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').(\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt:
$$\sin^2\tfrac{1}{2}p = \frac{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''''\operatorname{tang} e'} \,.$$
$$(\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').\cos^2 r;$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}q = \frac{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''''\operatorname{tang} e'}{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''} \,.$$
$$(\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').\cos^2 r.$$

Bezeichnet man die Perpendikel vom Mittelpunkte M des Kreiſes auf die Diagonalen p, q durch $\overset{p}{e}$, $\overset{q}{e}$, ſo laſſen ſich mittelſt der Gleichungen:
$$\operatorname{tang}\overset{p}{e} = \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang} r;$$
$$\operatorname{tang}\overset{q}{e} = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang} r;$$
ähnliche Relationen für $\overset{p}{e}$, $\overset{q}{e}$ herleiten.

Zuſ. 4. Daß zwiſchen den Abſchnitten p′, p″, q′, q″ der Diagonalen p, q die Gleichung:
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}q'\operatorname{tang} q''$$
ſtatt findet, iſt §. 54, Zuſ. 2. bemerkt worden.

§. 72.

Aufgabe. Die Winkel des eingeſchriebenen ſphäriſchen Viereckes durch die Seiten deſſelben auszudrücken.

Auflöſung. Man ziehe in dem Vierecke ABCD (Fig. 34.) eine Diagonale BD, die wieder mit q bezeichnet werde, ſo wie durch a, b, c, d die Seiten DA, AB u. ſ. w. und durch A, B, C, D die Winkel nach ihren Scheiteln. In dem Dreiecke ABD iſt nach §. 29.

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(q + a - b) \sin \frac{1}{2}(q + b - a)}{\sin a \sin b};$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} q - \sin^2 \frac{1}{2}(a - b)}{\sin a \sin b}; \quad (\text{§. } 2,\ 68.)$$

$$= \frac{\frac{z\,z''}{z'} - \sin^2 \frac{1}{2}(a - b)}{\sin a \sin b}; \quad (\text{§. } 71,\ \text{Zuſ. } 1.)$$

$$= \frac{z\,z'' - z' \sin^2 \frac{1}{2}(a - b)}{z' \sin a \sin b}; \quad (\alpha)$$

Nun iſt:

$$z\,z'' = (\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}d)(\sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}d \sin\tfrac{1}{2}a)$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b(\sin^2\tfrac{1}{2}c + \sin^2\tfrac{1}{2}d) + \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d(\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b);$$

und $z' \sin^2 \frac{1}{2}(a - b) = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2}(a - b)$

$$+ \sin \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2} d \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b);$$

daher:

$$z\,z'' - z' \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b(\sin^2\tfrac{1}{2}c + \sin^2\tfrac{1}{2}d - \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b))$$

$$+ \sin \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2} d (\sin^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b - \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b));$$

Die in der letzten Parentheſe enthaltenen Glieder laſſen ſich zuſammenziehen. Denn es iſt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b - \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$= \sin^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) - 1;$$

$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) - (1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} b);$$

$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) - \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}(a + b); \quad (\text{§. } 2,\ 69.)$$

$$= \cos \tfrac{1}{2}(a - b)(\cos \tfrac{1}{2}(a - b) - \cos \tfrac{1}{2}(a + b));$$

$$= \cos \tfrac{1}{2}(a - b) . 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b.$$

Dieſen Ausdruck ſubſtituirt erhält man:

$$zz'' - z'\sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) = \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\left\{\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}d-\sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) + 2\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\right\};$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\left\{1-\sin^2\tfrac{1}{2}c-\sin^2\tfrac{1}{2}d-\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)- 2\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\right\};$$

Der in { } befindliche Theil läßt ſich nach §. 4, No. 3. in Faktoren zerlegen. Schreibt man dort $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}(a-b)$ reſp. für α, β, γ; ſo ergiebt ſich:

$$zz''-z'\sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) = 4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,.\,\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d) \cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d);$$

Wird dieſer Ausdruck für $zz''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$ in (α) eingeſetzt und Nenner und Zähler mit $4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$ dividirt, ſo erhält man:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b};$$

Die Symmetrie der zwei letzten Faktoren des Zählers in Bezug auf A wird deutlicher, wenn man ſie ſo ſchreibt:

$$\cos\tfrac{1}{4}((a-b)+(c-d))\cos\tfrac{1}{4}((a-b)-(c-d))$$

Um $\cos\frac{1}{2}A$ zu finden erhält man aus dem Dreiecke ABD

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+q)\sin\frac{1}{2}(a+b-q)}{\sin a\sin b};\ (§.\ 29.)$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-\sin^2\frac{1}{2}q}{\sin a\sin b};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-\frac{zz''}{z'}}{\sin a\sin b};$$

$$= \frac{z'\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-zz''}{z'\sin a\sin b}.$$

Nach der oben ausgeführten Entwickelung erhält man hier:

$$z'\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b)-zz'' = \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b(\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b)-\sin^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}d) + \sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d(\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b)-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b);$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b(\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b)-\sin^2\tfrac{1}{2}c-\sin^2\tfrac{1}{2}d) + 2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}(a+b);$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \left\{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}d - \cos^2\tfrac{1}{2}(a+b) \right.$$
$$\left. + 2\sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right\};$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)$$
$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d); \quad (\beta)$$

Daher iſt: $\cos^2\tfrac{1}{2}A =$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b};$$

Aus dieſen Formeln für $\sin\tfrac{1}{2}A$ und $\cos\tfrac{1}{2}A$ erhält man:
$\tang^2\tfrac{1}{2}A =$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}{\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)};$$

Nach der §. 71, Zuſ. 2. angenommenen Bezeichnung laſſen ſich dieſe Ausdrücke kürzer ſo darſtellen:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}; \quad (1.)$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}; \quad (2.)$$

$$\tang^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}}; \quad (3.)$$

Aus (1.) und (2.) erhält man durch Multiplikation:

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}; \quad (4.)$$

durch Subtraktion:

$$\cos A = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K} - \overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}; \quad (5.)$$

Durch Vertauſchung jeder Seite mit der folgenden erhält man aus dieſen Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}; \quad (6.)$$ ($\overset{24}{K}$ gegen $\overset{13}{K}$ vertauſcht.)

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{14}{K}}{z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}; \quad (7.)$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{14}{K}}; \quad (8.)$$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}; \quad (9.)$$

Wird in dieſen Formeln dieſelbe Vertauſchung wiederholt, wobei z'' in z' zurückgeht, ſo erhält man:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d}; \quad (10.)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,K\,\overset{12}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d}; \quad (11.)$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,K\,\overset{12}{K}}; \quad (12.)$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z'\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d}; \quad (13.)$$

Endlich iſt: $\sin^2 \tfrac{1}{2} D = \dfrac{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{z''\cos\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}a}$; (14.)

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} D = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{14}{K}}{z''\cos\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}a}; \quad (15.)$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} D = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{14}{K}}; \quad (16.)$$

$$\sin D = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z''\cos\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}a}; \quad (17.)$$

Zuſ. 1. Addirt man die Gleichungen (1.) und (2.), ſo ergiebt ſich: $1 = \dfrac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}}{z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}$

oder $z'\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b = \overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}$, welcher Ausdruck in den Formeln 1, 2, 4, 5 ſubſtituirt werden kann. Eben ſo iſt für die übrigen Formeln:

$$z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c = \overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K} + \overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{14}{K};$$

$$z'\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d = \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K} + \overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,K\,\overset{12}{K};$$

$$z''\cos\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}a = \overset{4}{S}\,\overset{1}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K} + \overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{14}{K};$$

Zuſ. 2. Aus (4.) und (9.) erhält man die Proportion:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{z''\cos\frac{1}{2}c}{z'\cos\frac{1}{2}a};$$

aus (4.) und (13.) $\dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$;

Nach (3.) und (8.) iſt $\dfrac{\tang\frac{1}{2}A}{\tang\frac{1}{2}B} = \dfrac{\overset{1}{S}\,\overset{14}{K}}{\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}}$;

nach (3.) und (12.) $\dfrac{\tang\frac{1}{2}A}{\tang\frac{1}{2}C} = \dfrac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}}{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}$.

Zuſ. 3. Aus (1.) und (7.) erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

aus (2.) und (6.)

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

Daher iſt $(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B - \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B)$ oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{14}{K} - \overset{3}{S}\,\overset{12}{K}}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

Nun iſt $\overset{1}{S}\,\overset{14}{K} - \overset{3}{S}\,\overset{12}{K} = \sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d)$
$\quad - \sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)$;

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{2} - \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c) + \sin\frac{1}{2}d}{2}; \text{ (§. 2, 43.)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a) - \sin\frac{1}{2}(b+a-c)}{2};$$

$= \cos\frac{1}{2}b \,.\, \sin\frac{1}{2}(c-a)$.

Dies ſubſtituirt giebt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}}. \quad (18.)$$

Durch Verwechſelung jeder Seite mit der folgenden ergiebt ſich hieraus:

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}(d-b)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d}}; \quad (19.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(C-D) = \sin\tfrac{1}{2}(a-c)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}}; \quad (20.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(D-A) = \sin\tfrac{1}{2}(b-d)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}d}}; \quad (21.)$$

Aus den Formeln (18.) und (20.) folgt, daß:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = -\sin\tfrac{1}{2}(C-D);$$

oder $A-B = D-C$

oder $A+C = B+D$ iſt. (g. S. §. 75, Zuſ. 3.)

Daſſelbe geht aus (19.) und (21.) hervor.

Aus den Formeln (2.) und (7.) erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{4}{S}\,K}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

aus (1.) und (6.)

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

Daher iſt: $(\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B + \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B)$ oder

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K}}{\cos\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}};$$

Hier läßt ſich $\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K}$ noch zuſammenziehen. Es iſt nämlich $\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K} = \sin\frac{1}{2}(a+b+c-d)\cos\frac{1}{2}(a+b+c+d)$

$$+ \sin\tfrac{1}{2}(a-b+c+d)\cos\tfrac{1}{2}(a-b+c-d);$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) - \sin\frac{1}{2}d}{2} + \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c) + \sin\frac{1}{2}d}{2};$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) + \sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{2};$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}(a+c)\cos\tfrac{1}{2}b.$$

Dieſen Ausdruck oben ſubſtituirt erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(a+c)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (22.)$$

Durch Verwechſelung der Seiten folgt hieraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}(b+d)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d}}; \quad (23.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C-D) = \sin\tfrac{1}{2}(c+a)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (24.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(D-A) = \sin\tfrac{1}{2}(d+b)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (25.)$$

Die Diviſion der Formeln 18 — 21 durch die vorſtehenden 22 — 25 ergiebt:

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)}{\sin\tfrac{1}{2}(c+a)}\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}}; \quad (26.)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(d-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}}; \quad (27.)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(C-D) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+c)}\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}}; \quad (28.)$$

$$= -\tan\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(D-A) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-d)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+d)}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}}; \quad (29.)$$

$$= -\tan\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Aus (26.) und (27.) folgt:

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)\tan\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sin\tfrac{1}{2}(d-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(c+a)\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\cdot\frac{K\,\overset{13}{K}}{\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}};$$

$$\frac{\tan\tfrac{1}{2}(A-B)}{\tan\tfrac{1}{2}(B-C)} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a)}{\sin\tfrac{1}{2}(d-b)\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\cdot\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}}{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}}.$$

Zuſ. 4. Aus $\sin\frac{1}{2}(A-B) = \sin\frac{1}{2}(c-a)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}}$;

geht hervor, daß $A \lesseqgtr B$ iſt, jenachdem $c \lesseqgtr a$ iſt; daß alſo von zwei Winkeln des eingeſchriebenen Viereckes, welche an einer gemeinſchaftlichen Seite liegen, derjenige der größere iſt, deſſen zweiter Schenkel kleiner iſt, als der zweite Schenkel des andern Winkels.

Man kann alle diejenigen Seiten eines Viereckes, oder überhaupt eines Polygones, welche nicht Schenkel eines gewiſſen Winkels in demſelben ſind, als dieſem Winkel gegenüberſtehende betrachten. Dem Winkel A des eingeſchriebenen Viereckes, der die Schenkel a, b hat, ſtehen alſo gegenüber die Seiten c, d; dem Winkel B ſtehen gegenüber a und d. Jenachdem nun $c \lesseqgtr a$ iſt, iſt auch $c + d \lesseqgtr a + d$. Daher läßt ſich obiger Satz ſo ausſprechen:

Unter den an einer gemeinſchaftlichen Seite liegenden Winkeln des eingeſchriebenen Viereckes iſt derjenige der größere, welchem eine größere Summe von Seiten gegenüber ſteht.

Dieſer Satz gilt übrigens, wie ſich leicht nachweiſen läßt, von allen eingeſchriebenen Polygonen, zu denen auch jedes Dreieck gehört.

Zuſ. 5. Aus den Formeln 1 — 4 und 10 — 13 erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}}{z'}\sqrt{\frac{K\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{z'}\sqrt{\frac{K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

daraus folgt: $(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C)$ oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{z'}\sqrt{\frac{K\,\overset{1}{K}\,\overset{3}{K}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt $z' = \overset{1}{S}\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\overset{4}{S}$; alſo

$$\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\overset{4}{S}}{z'} = 1\text{; folglich}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sqrt{\frac{K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}\quad (30.)$$

Dieſelben Formeln 1 — 4 und 10 — 13 ergeben:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{K\overset{12}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

daraus folgt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{K\overset{12}{K} - \overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt: $\dfrac{K\overset{12}{K} - \overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'} = -1$;

folglich iſt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}\quad (31.)$$

Aus (30.) und (31.) erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}}\text{;}\quad (32.)$$

und $$\sin(A+C) = -2\frac{\sqrt{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}\text{;}\quad (33.)$$

Da in den Formeln (30.), (31.), (32.) (33.) die Seiten des Viereckes ſymmetriſch enthalten ſind, ſo hat die Vertauſchung derſelben keinen Einfluß auf die Formeln. Man erhält daher dieſelben Ausdrücke für
$\sin\frac{1}{2}(B+D)$, $\cos\frac{1}{2}(B+D)$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+D)$, $\sin(B+D)$; woraus ſich wieder der Satz ergiebt, daß $A+C = B+D$

iſt. Die negativen Vorzeichen in (31.), (32.), (33.) deuten an, daß die Summe je zweier Diagonalwinkel $> \pi$ iſt.

§. 73.

Aufgabe. Den Flächenraum des eingeſchriebenen Viereckes durch die Seiten deſſelben auszudrücken.

Auflöſung. Bedeutet Q den Flächenraum des Viereckes, ſo iſt $Q = A + B + C + D - 2\pi$; oder, da $A + C = B + D$ iſt, $Q = 2(A + C) - 2\pi$; oder $\frac{1}{2}Q = A + C - \pi$ und $\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}\pi$; mithin:

$$\sin\tfrac{1}{4}Q = -\cos\tfrac{1}{2}(A+C);\quad \cos\tfrac{1}{4}Q = \sin\tfrac{1}{2}(A+C);$$
$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{4}Q = -\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}(A+C);\quad \sin\tfrac{1}{2}Q = -\sin(A+C);$$

Aus den Formeln 30, 31, 32, 33, des vorigen Zuſ. erhält man alſo für den Flächenraum die Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{4}Q = \sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

$$\cos\tfrac{1}{4}Q = \sqrt{\frac{K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{4}Q = \sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}Q = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d};$$

Zuſ. Setzt man die Seite $d = 0$, ſo wird das Viereck ein Dreieck aus den Seiten a, b, c und die Formeln für $\sin\frac{1}{4}Q$, $\cos\frac{1}{4}Q$, $\mathrm{tang}\frac{1}{4}Q$, $\sin\frac{1}{2}Q$ verwandeln ſich in die §. 41. für $\sin\frac{1}{4}T$, $\cos\frac{1}{4}T$, $\mathrm{tang}\frac{1}{4}T$, $\sin\frac{1}{2}T$ aufgeſtellten Formeln. Eben ſo laſſen ſich aus den Formeln des vorigen §. die entſprechenden Formeln für die Winkel des Dreieckes ableiten, wenn man eine Seite des Viereckes $= 0$ macht.

§. 74.

Aufgabe. Den ſphäriſchen Radius des um

ein ſphäriſches Viereck beſchriebenen Kreiſes durch die Seiten des Viereckes auszudrücken.

Auflöſung. Zieht man in dem Viereck ABCD (Fig. 34.) die Diagonale BD, die wieder durch q ausgedrückt ſei; ſo liegt das Dreieck ABD mit dem Viereck in demſelben Kreiſe. Wird der ſphäriſche Radius des um ABD beſchriebenen Kreiſes mit r bezeichnet, ſo iſt nach §. 59.

$$\tan r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}q}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+q)\sin\frac{1}{2}(a+b-q)\sin\frac{1}{2}(q+a-b)\sin\frac{1}{2}(q+b-a)}};$$

oder

$$\tan^2 r = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}q}{(\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-\sin^2\frac{1}{2}q)(\sin^2\frac{1}{2}q-\sin^2\frac{1}{2}(a-b))};$$

Nach §. 71. iſt $\sin^2\frac{1}{2}q = \frac{zz''}{z'}$; dies eingeſetzt und Zähler und Nenner mit $z'z''$ multiplizirt giebt:

$$\tan^2 r = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b\,.\,zz'z''}{(z'\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-zz'')(zz''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b))};$$

Nun iſt, wie §. 72. (α) und (β) entwickelt wurde:

$$z'\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b)-zz'' = 4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K};$$

$$zz''-z'\sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) = 4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K};$$

Subſtituirt man dieſe Werthe und dividirt Nenner und Zähler durch $4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$, ſo erhält man:

$$\tan^2 r = \frac{zz'z''}{4.\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}};$$

oder, wenn man für z, z′, z″ die §. 71, Zuſ. 2. entwickelten Ausdrücke ſetzt:

$$\tan^2 r = \frac{(\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}+\overset{2}{S}\,\overset{4}{S})(\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}+\overset{3}{S}\,\overset{4}{S})(\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}+\overset{4}{S}\,\overset{1}{S})}{4\,\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}};$$

$$\tan^2 r = \frac{(\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}-K\,\overset{13}{K})(\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}-K\,\overset{12}{K})(\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}-K\,\overset{14}{K})}{4\,\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}};$$

§. 75.

Das um einen Kreis beſchriebene Viereck iſt das Polarviereck des eingeſchriebenen. Daher laſſen ſich die für das letztere entwickelten Formeln auf das umgeſchriebene leicht übertragen. Bezeichnet man wie oben mit a, b, c, d die Seiten, mit A, B, C, D die Winkel des eingeſchriebenen Viereckes; mit a', b', c', d', A', B', C', D' die Seiten und Winkel des umgeſchriebenen, ſo daß A' zwiſchen d', a'; B' zwiſchen a', b'; C' zwiſchen b', c' und D' zwiſchen c', d' liegt; ſo iſt:

$$a=\pi-A';\quad b=\pi-B';\quad c=\pi-C';\quad d=\pi-D';$$
$$A=\pi-a';\quad B=\pi-b';\quad C=\pi-c';\quad D=\pi-d'.$$

daher iſt: $\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}a'$; $\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}a'$ u. ſ. w.

$$z=\cos\tfrac{1}{2}A'\cos\tfrac{1}{2}C'+\cos\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}D';$$
$$z'=\cos\tfrac{1}{2}A'\cos\tfrac{1}{2}B'+\cos\tfrac{1}{2}C'\cos\tfrac{1}{2}D';$$
$$z''=\cos\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}C'+\cos\tfrac{1}{2}D'\cos\tfrac{1}{2}A';$$

Ferner iſt:

$\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)=\cos\frac{1}{4}(-A'+B'+C'+D')$;

$\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)=\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'+D')$; u. ſ. w.

$\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)=-\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'+D')$;

$\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)=\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'-D')$; u. ſ. w.

Bezeichnet man alſo $\cos\frac{1}{4}(-A'+B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'-D')$ reſp. durch $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$, $\overset{3}{C}$, $\overset{4}{C}$; und $\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'-D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'-D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'-C'+D')$ durch C, $\overset{12}{C}$, $\overset{13}{C}$, $\overset{14}{C}$; ſo iſt: $\overset{1}{S}=\overset{1}{C}$, $\overset{2}{S}=\overset{2}{C}$, $\overset{3}{S}=\overset{3}{C}$, $\overset{4}{S}=\overset{4}{C}$; $K=-C$, $\overset{12}{K}=\overset{12}{C}$, $\overset{13}{K}=\overset{13}{C}$, $\overset{14}{K}=\overset{14}{C}$.

Endlich ſei $\cos\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}C'+\cos\frac{1}{2}B'\cos\frac{1}{2}D'$ durch Z;
$\cos\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}B'+\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}D'$ durch Z';
$\cos\frac{1}{2}B'\cos\frac{1}{2}C'+\cos\frac{1}{2}D'\cos\frac{1}{2}A'$ durch Z'' bezeichnet.

Hiernach laſſen ſich aus §. 72. für das umgeſchriebene Viereck folgende Formeln, in denen die Seiten des Viereckes durch die Winkel ausgedrückt werden, ganz bequem abſchreiben.

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a' = \frac{-\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{12}{C}}{Z' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B'};$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a' = \frac{\overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}{Z' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B'};$$

$$\mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} a' = \frac{-\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{12}{C}}{\overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}$$

$$\sin a' = \frac{2\sqrt{-\overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{12}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}}{Z' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B'};$$

$$\cos a' = \frac{\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{12}{C} + \overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}{Z' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B'}.$$

Für die Seiten b′, c′, d′ hat man in den vorſtehenden Formeln nur die gehörige Vertauſchung der Buchſtaben A′, B′, C′, D′ und der Marken ¹, ², ³, ⁴, (′), (″), vorzunehmen, wobei zu bemerken iſt, daß nach §. 71, Zuſ. 2. für $\overset{23}{C}$, $\overset{24}{C}$, $\overset{34}{C}$ geſchrieben werden kann: $\overset{14}{C}$, $\overset{13}{C}$, $\overset{12}{C}$.

Aus Zuſ. 3. deſſelben §. erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2}(b' - a') = \sin \tfrac{1}{2}(A' - C') \sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{13}{C}}{Z' Z'' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} C'}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(b' - a') = \sin \tfrac{1}{2}(A' + C') \sqrt{\frac{\overset{1}{C}\,\overset{3}{C}\,\overset{12}{C}\,\overset{14}{C}}{Z' Z'' \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} C'}};$$

$$\mathrm{tang} \tfrac{1}{2}(b' - a') = \frac{\sin \frac{1}{2}(A' - C')}{\sin \frac{1}{2}(A' + C')} \sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{13}{C}}{\overset{1}{C}\,\overset{3}{C}\,\overset{12}{C}\,\overset{14}{C}}};$$

Aus Zuſ. 5. folgt:

$$\sin \tfrac{1}{2}(a' + c') = \sqrt{\frac{-C\,\overset{12}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}{\sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B' \sin \frac{1}{2} C' \sin \frac{1}{2} D'}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(a' + c') = \sqrt{\frac{\overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}}{\sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B' \sin \frac{1}{2} C' \sin \frac{1}{2} D'}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{-C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}}};$$

$$\sin(a'+c') = \frac{2\sqrt{-\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}}{\sin\frac{1}{2}A'\sin\frac{1}{2}B'\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}D'};$$

Der Symmetrie dieſer Formeln zufolge iſt $a'+c'=b'+d'$, was ſchon aus $A+C=B+D$ hervorgeht.

Aus Zuſ. 4. des §. 72. ergiebt ſich für das umgeſchriebene Viereck und überhaupt für jedes umgeſchriebene Polygon der Satz:

Von zwei Seiten eines umgeſchriebenen Viereckes (oder Polygones), welche einen und denſelben Winkel einſchließen, iſt diejenige die größere, welcher eine größere Summe von Winkeln gegenüber ſteht —
wobei jeder Winkel, der nicht an einer Seite liegt, als ein derſelben gegenüber liegender betrachtet wird.

Da jedes Dreieck ſowohl ein eingeſchriebenes als ein umgeſchriebenes ſein kann, ſo gelten von demſelben beide Sätze, daß dem größeren Winkel eine größere Summe von Seiten (d. h. eine größere Seite); und daß der größeren Seite eine größere Summe von Winkeln (d. h. ein größerer Winkel) gegenüber ſteht. Bei Figuren von mehr als drei Seiten iſt das nicht der Fall.

Endlich für den ſphäriſchen Radius ϱ des in das Viereck eingeſchriebenen Kreiſes, der der Polarkreis des um das Polarviereck mit dem Radius r beſchriebenen iſt, erhält man, da $\varrho=\frac{1}{2}\pi-r$ iſt, aus §. 74. die Formel:

$$\operatorname{tang}^2\varrho = \frac{-4\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{ZZ'Z''};$$

$$= \frac{-4\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{(\overset{1}{C}\overset{3}{C}+\overset{2}{C}\overset{4}{C})(\overset{1}{C}\overset{2}{C}+\overset{3}{C}\overset{4}{C})(\overset{2}{C}\overset{3}{C}+\overset{4}{C}\overset{1}{C})};$$

$$= \frac{-4\,\overset{1}{C}\,\overset{2}{C}\,\overset{3}{C}\,\overset{4}{C}\,C\,\overset{12}{C}\,\overset{13}{C}\,\overset{14}{C}}{(C\,\overset{12}{C}+\overset{13}{C}\,\overset{14}{C})(C\,\overset{13}{C}+\overset{12}{C}\,\overset{14}{C})(C\,\overset{14}{C}+\overset{12}{C}\,\overset{13}{C})};$$

Das umgeſchriebene Viereck geht in ein Dreieck über, wenn zwei von den Punkten, in welchen die Seiten deſſelben den eingeſchriebenen Kreis berühren, in einen Punkt zuſammengehen. Die Bogen, welche in jenen Punkten den Kreis berühren, fallen dann in einen Bogen zuſammen und der Winkel, welchen ſie einſchließen wird $= \pi$. Um alſo vom umgeſchriebenen Vierecke auf das Dreieck überzugehen, braucht man nur einen Winkel des Viereckes $= \pi$ zu ſetzen. Dies läßt ſich auch auf folgende Weiſe darthun. Das eingeſchriebene Viereck wird zum Dreiecke, wenn eine Seite deſſelben, etwa d, $= 0$ geſetzt wird. Das Polarviereck deſſelben — das umgeſchriebene — iſt dann ebenfalls in ein Dreieck übergegangen. Da nun der Winkel $D' = \pi - d$ iſt, ſo folgt für $d = 0$, daß $D' = \pi$ geworden iſt. Man kann alſo aus den Formeln dieſes §. die entſprechenden für das Dreieck herleiten, wenn der Winkel $D' = \pi$ geſetzt wird. Die Winkel des dadurch bedingten Dreieckes ſind A', B', C', denen bezüglich die Seiten b', $(c' + d')$, a' gegenüber ſtehen. Um die bei Dreiecken gewöhnliche Bezeichnung beizubehalten, ſchreibe man a für b', b für $(c' + d')$, c für a'. Dann iſt für c' zu ſetzen $\frac{1}{2}(a + b - c)$ und $\frac{1}{2}(c + b - a)$ für d'.

So laſſen ſich aus dem gegenwärtigen §. und aus §. 72. die meiſten der in §. 28. — §. 33. entwickelten Formeln ableiten.

Beſtimmung ſphäriſcher Flächenräume, die von Nebenkreiſen begränzt werden.

§. 76.

Aufgabe. Den ſphäriſchen Flächenraum eines Nebenkreiſes durch den ſhhäriſchen Radius deſſelben auszudrücken.

Auflöſung. Es ſei (Fig. 35.) M der Mittelpunkt eines Nebenkreiſes ABD und durch C, den Mittelpunkt der Kugel, die Achſe deſſelben, MM', gezogen, die in dem Mittelpunkte c der Kreisebne auf derſelben ſenkrecht ſteht. Die ſphäriſche Oberfläche des Kugelabſchnittes ABDM iſt nun einer Kugelzone gleich, welche gleiche Höhe mit jenem Abſchnitte hat; — alſo gleich dem Produkte aus der Peripherie eines Hauptkreiſes in die Höhe Mc des Kugelabſchnittes. Die Peripherie eines Hauptkreiſes iſt nun $= 2\pi$, wenn der Kugelradius $= 1$ genommen wird. Wird alſo der ſphäriſche Flächenraum ABDM mit K bezeichnet, ſo iſt $K = 2\pi . Mc$.

Nun iſt Cc der Koſinus des Bogens MA, der als der ſphäriſche Radius des Nebenkreiſes mit r bezeichnet werde. Daher iſt $Mc = MC - Cc = 1 - \cos r$; mithin:

$$K = 2\pi(1 - \cos r);$$
$$= 4\pi \sin^2 \tfrac{1}{2} r;$$

Zuſ. 1. Der Flächenraum der Kugel iſt $= 4\pi$. Zieht man hiervon den ſphär. Flächenraum K des Nebenkreiſes ABD ab, ſo bleibt für den Reſt:

$$M'ABD = 4\pi - 2\pi(1 - \cos r)$$
$$= 2\pi(1 + \cos r);$$

Da $r = MA = \pi - M'A$ iſt, ſo iſt $\cos r = -\cos M'A$; mithin:

$$M'ABD = 2\pi(1 - \cos M'A),$$

welche Formel mit der obigen $K = 2\pi(1 - \cos r)$ identiſch iſt und deren Gültigkeit auch für den Fall, wenn der ſphäriſche Radius eines Nebenkreiſes $> \frac{1}{2}\pi$ genommen wird, beweiſt.

Zuſ. 2. Der Flächeninhalt der Kreisebne ABD, deren Halbmeſſer $Ac = \sin r$ iſt, iſt $= \pi Ac^2 = \pi \sin^2 r$. Wird derſelbe mit k bezeichnet, ſo folgt aus:

$$K = 2\pi(1 - \cos r) \text{ und } k = \pi \sin^2 r$$

durch Subtraktion:

$$K - k = \pi(2 - 2\cos r - \sin^2 r) = \pi(1 - 2\cos r + \cos^2 r)$$
$$= \pi(1 - \cos r)^2 = \pi . Mc^2.$$

Beſchreibt man alſo mit einem Radius, der gleich der Höhe Mc des Kugelabſchnittes iſt, einen Kreis; ſo iſt der Flächeninhalt deſſelben die Differenz zwiſchen der ſphäriſchen Oberfläche des Kugelabſchnittes und der Baſis deſſelben.

Zuſ. 3. Die Peripherie P des Nebenkreiſes ABD iſt $=2\pi\,Ac=2\pi\sin r$. Daher iſt:

$$\frac{K}{P}=\frac{4\pi\sin^2\frac{1}{2}r}{2\pi\sin r}=\tang\tfrac{1}{2}r.$$

Daraus iſt erſichtlich, daß der ſphäriſche Flächeninhalt eines Nebenkreiſes kleiner als der Umfang deſſelben iſt; vorausgeſetzt nämlich, daß, wie dies am natürlichſten iſt, unter dem ſphäriſchen Flächenraume eines Nebenkreiſes von den beiden Theilen, in welche die Kugelfläche durch dieſen Kreis zerfällt, der kleinere verſtanden wird, für welchen dann der ſphäriſche Halbmeſſer immer $<\frac{1}{2}\pi$ iſt.

Iſt $r=\frac{1}{2}\pi$, ſo iſt $\tang\frac{1}{2}r=1$; alſo $K=P$; d. h. die halbe Kugelfläche dem Umfange eines Hauptkreiſes gleich.

Zuſ. 4. Beſchreibt man um M einen zweiten Kreis A′B′D′ (Fig. 36.), deſſen ſphär. Flächenraum mit K′, deſſen ſphär. Radius mit r′ bezeichnet ſei, ſo iſt $K'=2\pi(1-\cos r')$, mithin:

$$K'-K=2\pi(\cos r-\cos r');$$

Die Differenz $K'-K$ iſt aber die zwiſchen den Parallelkreiſen ABD, A′B′D′ enthaltene Kugelzone. Wird dieſe mit z bezeichnet, ſo iſt demnach:

$$z=2\pi(\cos r-\cos r')=4\pi(\sin^2\tfrac{1}{2}r'-\sin^2\tfrac{1}{2}r);$$
$$=4\pi\sin\tfrac{1}{2}(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(r'-r).$$

Uebrigens gelten dieſe Ausdrücke überhaupt für die Differenz zweier Kreiſe von den Radien r, r′, die alſo nicht parallel zu ſein brauchen.

Die Differenz der Kreisebnen von ABD, A′B′D′ iſt:

$$=\pi\sin^2 r'-\pi\sin^2 r=\pi(\sin^2 r'-\sin^2 r);$$
$$=\pi\sin(r'+r)\sin(r'-r).$$

Wird dieſe mit ζ bezeichnet, ſo erhält man:

$$\zeta=4\pi\sin\tfrac{1}{2}(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(r'-r)\cos\tfrac{1}{2}(r'+r)\cos\tfrac{1}{2}(r'-r);$$

daher $\frac{z}{\zeta} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(r'+r)\cos\frac{1}{2}(r'-r)}$..

Nach Zuſ. 1. kann $A'M > \frac{1}{2}\pi$ ſein, ohne daß die Formel $K' = 2\pi(1 - \cos r')$ ſich ändert. Daher iſt der für z angegebene Ausdruck gültig, die Kreiſe, durch welche die Zone begränzt wird, mögen auf einer und derſelben Kugelhälfte liegen, oder nicht.

Zuſ. 5. Iſt A″B″D″ (Fig. 36.) der Gegenkreis von ABD, ſo hat man nach vorigem Zuſ. für die zwiſchen denſelben enthaltenen Zone die Formel:

$$z = 2\pi(\cos MA - \cos MA'').$$

Da hier aber $MA'' = \pi - MA$, alſo $\cos MA'' = -\cos MA$ iſt, ſo erhält man für die zwiſchen Gegenkreiſen enthaltene Zone den Ausdruck:

$$z = 4\pi\cos r.$$

Da der Abſtand AA″ der Gegenkreiſe, den man als die ſphäriſche Höhe der Zone betrachten kann, das Supplement von 2r, alſo, wenn derſelbe mit h bezeichnet wird, $r = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$ iſt, ſo erhält man den Inhalt der Zone durch die Höhe derſelben ausgedrückt in der Formel:

$$z = 4\pi\sin\frac{1}{2}h.$$

§. 77.

Lehrſatz. Die Differenz der ſphäriſchen Flächenräume zweier Polarkreiſe iſt der Differenz ihrer Umfänge gleich.

Beweis. Es ſeien (Fig. 36.) ABD und A′B′D′ zwei Polarkreiſe, deren ſphär. Radien MA, MA′ durch r, r′, und deren Flächenräume durch K, K′ bezeichnet ſeien. Nach vorigem §. iſt $K = 2\pi(1 - \cos r)$; $K' = 2\pi(1 - \cos r)$; daher $K' - K = 2\pi(\cos r - \cos r')$. Da nun $r' = \frac{1}{2}\pi - r$ iſt (g. S. §. 66.), ſo folgt:

$$K' - K = 2\pi(\cos r - \sin r).$$

Bezeichnet man mit P, P′ die Peripherieen der Polarkreiſe, ſo iſt: $P = 2\pi\sin r$; $P' = 2\pi\sin r' = 2\pi\cos r$; daher:

$$P' - P = 2\pi(\cos r - \sin r).$$

Hieraus folgt daß $K' - K = P' - P$ iſt.

Zuſ. Aus $K = 2\pi(1 - \cos r)$ und $P' = 2\pi \cos r$ folgt

$$K + P' = 2\pi$$

d. h. Die Summe aus dem ſphäriſchen Flächenraume eines Kugelkreiſes und der Peripherie ſeines Polarkreiſes iſt der halben Kugelfläche gleich.

Daher iſt auch $K' + P = 2\pi$; woraus $K + P' = K' + P$ und $K' - K = P' - P$ oder $K' - P' = K - P$ folgt.

Anmerk. Dieſe merkwürdige Eigenſchaft der Polarität findet ſich auch bei andern ſphäriſchen Kurven.

§. 78.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines ſphäriſchen Sektors auszudrücken.

Auflöſung. Man ziehe (Fig. 36.) von dem Mittelpunkte M des Nebenkreiſes ABD zwei ſphäriſche Radien MA, MB. Der zwiſchen denſelben und dem Nebenbogen AB enthaltene Sektor ſei mit S, der Winkel AMB deſſelben mit α bezeichnet. Da ſich der Flächeninhalt des Sektors zu dem des Nebenkreiſes verhält wie der Winkel α zu der Summe von vier Rechten, ſo erhält man:

$$\frac{S}{K} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ und hieraus } S = \frac{\alpha K}{2\pi}.$$

Setzt man für K die Werthe $2\pi(1 - \cos r)$, $4\pi \sin^2 \frac{1}{2} r$, ſo erhält man die Formeln:

$$S = \alpha(1 - \cos r); \quad S = 2\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2} r.$$

Iſt der abſolute Werth des Nebenbogens AB, auf welchem der Sektor ſteht, $= a$, ſo iſt $\alpha = \frac{a}{\sin r}$.

Subſtituirt man dieſen Werth für α in obiger Formel, ſo erhält man:

$$S = \frac{2a \sin^2 \frac{1}{2} r}{\sin r} = a \tang \tfrac{1}{2} r$$

woraus $\frac{S}{a} = \tang \frac{1}{2} r$ folgt. Vergl. §. 76, Zuſ. 3.

Zuſ. 1. Beſchreibt man um M als Pol den Hauptkreis abd, der in a, b von den verlängerten Radien MA, MB getroffen wird, ſo ergiebt ſich aus Obigem für den Sektor aMb — die Hälfte der Spindel MabM' — der Ausdruck:

$aMb = \alpha =$ Winkel $aMb =$ Bogen ab. (Vergl. g. S. §. 49.)

Wird von der halben Spindel abM der Sektor ABM abgezogen, ſo bleibt das Viereck abAB übrig, ein durchaus rechtwinkliges, deſſen Grundſeite der Hauptbogen ab ($= \alpha$) iſt, während aA als die ſphäriſche Höhe deſſelben betrachtet werden kann. Für den Flächenraum deſſelben findet ſich der Ausdruck:

$$abAB = \alpha - \alpha(1 - \cos r) = \alpha \cos r;$$

oder, wenn für α eine Grundſeite ab geſetzt wird:

$$abAB = ab . \cos r$$

Da die Höhe $aA = \frac{1}{2}\pi - r$ iſt, ſo erhält man auch:

$$abAB = \alpha \sin h = ab . \sin aA.$$

Setzt man in dieſen Formeln für α den Werth $\frac{a}{\sin r}$, oder $\frac{a}{\cos h}$, wo $a = AB$ iſt, ſo ergiebt ſich:

$$abAB = \frac{a \cos r}{\sin r} = a \operatorname{cotg} r = a \operatorname{tang} h.$$

Zuſ. 2. Beſchreibt man um M den Parallelkreis A'B'D', der von den Quadranten aM, bM in A', B' geſchnitten wird, ſo iſt der Raum abA'B' ein Viereck wie oben abAB. Daher iſt:

$$abA'B' = \alpha . \sin aA' = \alpha . \sin h'$$

wenn aA' durch h' bezeichnet wird.

Zieht man abA'B' von abAB ab, ſo bleibt das Viereck A'B'AB, das auch lauter rechte Winkel enthält. Für den Flächenraum deſſelben ergiebt ſich der Ausdruck:

$$ABA'B' = \alpha \sin h - \alpha \sin h' = \alpha(\sin h - \sin h')$$
$$= 2\alpha \sin \tfrac{1}{2}(h - h') \cos \tfrac{1}{2}(h + h')$$

wo $(h - h')$ d. i. AA' die Höhe des Viereckes beſtimmt.

Digitized by Google

Drückt man h, h' durch die ſphär. Radien r, r' der Parallelkreiſe ABD, A'B'D' aus, ſo erhält man:

$A'B'AB = \alpha(\cos r - \cos r') = 2\alpha \sin \frac{1}{2}(r' - r) \sin \frac{1}{2}(r' + r)$.

woraus ſich der §. 76, Zuſ. 4. für die Kugelzone bemerkte Ausdruck ableiten läßt, wenn man $\alpha = 2\pi$ ſetzt.

Zuſ. 3. Nimmt man den Nebenbogen EF = AB und zieht A'E, B'F, ſo iſt das Viereck A'B'EF = A'B'AB. Denn man ziehe die ſphär. Radien ME, MF. In den Dreiecken MEA', MFB' iſt ME = MF, MA' = MB' und Winkel A'ME = B'MF, weil ſie auf gleichen Nebenbogen AE, BF ſtehen. Daraus folgt, daß A'E = B'F und Winkel EA'M = FB'M iſt. Legt man nun das Afterdreieck B'BF auf A'AE, ſo daß B auf A, B' auf B fällt, ſo fällt der Bogen B'F auf A'E und F auf E. Die Dreiecke decken ſich alſo, mithin ſind die Flächenräume derſelben gleich. Hieraus folgt aber, daß A'B'EF = A'B'AB iſt. Daher iſt auch:

$A'B'EF = \alpha(\cos r - \cos r') = 2\alpha \sin \frac{1}{2}(r' + r) \sin \frac{1}{2}(r' - r)$;

wo α den relativen Werth der parallelen und ähnlichen Nebenbogen A'B', EF; r', r die zugehörigen ſphäriſchen Radien andeuten. Durch (r' — r) wird die Höhe des Viereckes ausgedrückt.

Zuſ. 4. Auf der andern Seite des Hauptkreiſes abd ſei A''B''D'' ein Parallelkreis zu ABD, der in A'', B'' von den Halbkreiſen MAM', MBM' geſchnitten wird. Für den Flächenraum des Viereckes A''B''AB hat man nach Zuſ. 2. die Formel:

$$A''B''AB = \alpha(\cos MA - \cos MA'')$$
$$= \alpha(\cos MA + \cos M'A'');$$

oder, wenn MA wieder mit r, MA'' mit r' bezeichnet wird,

$$A''B''AB = \alpha(\cos r + \cos r');$$
$$= 2\alpha \cos \tfrac{1}{2}(r + r') \cos \tfrac{1}{2}(r - r');$$

Die ſphäriſche Höhe dieſes Viereckes iſt AA''. Bezeichnet man ſie mit h, ſo iſt $r + r' = \pi - h$; daher folgt aus vorſtehender Formel:

$$A''B''AB = 2\alpha \sin \tfrac{1}{2} h . \cos \tfrac{1}{2}(r - r').$$

Zieht man nach den Endpunkten E, F des Nebenbogens EF, der = AB genommen wurde, die Bogen A″E, A″F, ſo iſt das Viereck A″B″EF = A″B″AB; was aus dem in Zuſ. 3. geführten Beweiſe erhellt. Denn die dort gemachten Schlüſſe bleiben dieſelben, wenn man A′, B′ gegen A″, B″ vertauſcht. Daher gelten die für den Flächenraum A″B″AB angegebenen Formeln auch für das ſchiefe Viereck A″B″EF.

Zuſ. 5. Sind ABD, A″B″D″ Gegenkreiſe, ſo iſt $r' = r$ und der Nebenbogen A″B″ = AB = EF.

Das Viereck A″B″EF iſt dann ein ſphäriſches Afterparallelogramm, deſſen Grundſeiten A″B″ und EF Nebenbogen ſind. Wird der Flächeninhalt deſſelben mit 𝔓 bezeichnet, ſo erhält man aus der Formel A″B″AB = A″B″EF $= \alpha(\cos r + \cos r')$ (Zuſ. 4.) für 𝔓 den Ausdruck:

$\mathfrak{P} = 2\alpha \cos r$, oder wenn man r durch die ſphär. Höhe des Parallelogrammes ausdrückt,

$$\mathfrak{P} = 2\alpha \sin \tfrac{1}{2} h.$$

Bezeichnet man den abſoluten Werth des Nebenbogens A″B″ wieder mit a, ſo iſt $\alpha = \frac{a}{\sin r} = \frac{a}{\cos \frac{1}{2} h}$, mithin:

$$\mathfrak{P} = 2 a \tang \tfrac{1}{2} h.$$

Zuſ. 6. Durch die Diagonale A″F wird A″B″EF halbirt. Denn zieht man die (ſphär.) Sehnen der gleichen Nebenbogen A″B″, EF, welche in beiden Kreiſen gleiche Segmente s, s' abſchneiden, ſo erhält man das (eigentliche) ſphäriſche Parallelogramm A″B″EF, das durch A″F halbirt wird. Nimmt man nun von den gleichen Dreiecken A″B″F, EFA″ die gleichen Segmente s, s' weg, ſo bleiben die gleichen Afterdreiecke A″B″F, EFA″. Bezeichnet man deren Flächenräume durch 𝔗, ſo iſt $\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\mathfrak{P}$, daher:

$$\mathfrak{T} = \alpha \sin \tfrac{1}{2} h \text{ und } \mathfrak{T} = a \tang \tfrac{1}{2} h.$$

Für ein anderes Afterdreieck 𝔗′ von derſelben Höhe h, deſſen Grundſeite a′ iſt, hat man demnach $\mathfrak{T}' = a' \tang \frac{1}{2} h$. Hieraus folgt: $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}'} = \frac{a}{a'}$.

Solche Afterdreiecke von gleicher Höhe oder zwiſchen gleichen Gegenkreiſen verhalten ſich alſo wie die Nebenbogen, auf denen ſie ſtehen.

Daſſelbe gilt von den Afterparallelogrammen des vorigen Zuſatzes.

Zuſ. 7. Bedeutet a die von A″ nach B″ gezogene ſphär. Sehne, auf welcher als Grundſeite das ſphär. Dreieck A″B″F ſteht, deſſen Flächenraum $= T$ ſei, ſo iſt nach §. 62.

$$\sin \tfrac{1}{2} T = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h.$$

Nach vorigem Zuſ. iſt $\mathfrak{T} = \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h.$

Daraus folgt:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} T}{\mathfrak{T}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\mathfrak{a}}.$$

Aus den Formeln: $\operatorname{tang} \frac{1}{2} T = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} h$ (§. 62.)

und . . . . $\mathfrak{T} = \alpha \sin \frac{1}{2} h$ (Zuſ. 6.)

erhält man die merkwürdige Proportion:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} T}{\mathfrak{T}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{\alpha}.$$

Zuſ. 8. Nimmt man von dem ſphäriſchen Trapez ABCD (Fig. 33.) die ſphär. Segmente, welche zwiſchen den Seiten AB, CD und den gleichnamigen Nebenbogen enthalten ſind, weg; ſo behält man das zwiſchen den parallelen Nebenbogen AB, CD enthaltene Aftertrapez, das hier durch ABCD angedeutet werden ſoll. Durch die Diagonale AD wird daſſelbe in die Afterdreiecke ABD, ACD zerlegt, die mit dem Trapeze gleiche Höhe h haben und deren Grundſeiten — die Nebenbogen AB, CD — reſp. durch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ bezeichnet ſeien. Die relativen Werthe von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, nämlich die Quotienten $\frac{\mathfrak{a}'}{\sin r}$, $\frac{\mathfrak{a}''}{\sin r}$ oder die Zentriwinkel von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ſeien durch α', α'' bezeichnet. Nach Zuſ. 6. iſt nun:

$$ABD = \mathfrak{a}' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h; \quad ACD = \mathfrak{a}'' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h.$$

Daher iſt $ABCD = (\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}') \operatorname{tang} \frac{1}{2} h.$

Ferner iſt $ABD = \alpha' \sin \frac{1}{2} h; \quad ACD = \alpha'' \sin \frac{1}{2} h;$

folglich: $ABCD = (\alpha' + \alpha'') \sin \frac{1}{2} h.$

Nach §. 70. iſt der Bogen FG, der die Seiten AC, BD des Trapezes halbirt, $= \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')$; daher erhält man aus der zweiten Formel den Ausdruck:

$$ABCD = 2FG . \sin \tfrac{1}{2} h.$$

Aus dieſen Formeln ergiebt ſich:

daß ſolche zwiſchen Gegenkreiſen liegende Aftertrapeze von gleicher Höhe ſich verhalten wie die Summen der Nebenbogen, zwiſchen denen ſie enthalten ſind.

Vom Sehnendreiecke.

§. 71.

Aufgabe. Die Winkel des zu einem ſphäriſchen Dreiecke gehörigen Sehnendreieckes zu finden.

Auflöſung. Um das ſphäriſche Dreieck ABC Fig. 37. beſchreibe man einen Kreis, deſſen Ebne durch die Ebnen der Seiten des ſphär. Dreieckes in den graden Linien AB, AC, BC, den Sehnen der gleichnamigen Bogen, geſchnitten wird, welche Sehnen das gradlinige Dreieck ABC bilden, deſſen Winkel gefunden werden ſollen. Man ziehe durch den Pol M des Nebenkreiſes die ſphäriſchen Durchmeſſer BB′, CC′, deren Ebnen, ſenkrecht ſtehend auf der Kreisebne ABC, mit dieſer die gradlinigen Durchſchnitte BB′, CC′ geben, welche ſich im Mittelpunkte m der Kreisebne ſchneiden, alſo Durchmeſſer derſelben ſind. Der Zentriwinkel BmC, auf deſſen Schenkeln Bm, Cm der Theil Mm der Achſe des Nebenkreiſes ſenkrecht ſteht, iſt der Neigungswinkel der Kreisebnen BMB′, CMC′, alſo dem ſphäriſchen Winkel BMC gleich. Bezeichnen wir alſo die Winkel des Sehnendreieckes an den Ecken A, B, C der Reihe nach mit 𝔄, 𝔅, ℭ, ſo iſt der Peripheriewinkel $𝔄 = \frac{1}{2}$BmC, alſo auch $𝔄 = \frac{1}{2}$BMC. Fällt man nun in dem gleichſchenkligen ſphäriſchen Dreiecke BMC das Perpendikel MD, ſo wird der Winkel an M halbirt und

es iſt $\mathfrak{A} = BMD$. In dem rechtwinkligen Dreiecke BDM iſt nun $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$; der Winkel MBD iſt $= \frac{1}{2}(C+B-A)$; MD iſt das Komplement des Neigungswinkels (v') der Ebne des Sehnendreieckes gegen die Ebne des Bogens BC, oder der Seite a (g. S. §. 45.). Man erhält demnach aus dieſem Dreiecke Gleichungen zwiſchen $\mathfrak{A}$ und a, $(C+B-A)$, v' und dem ſphär. Radius r des umgeſchriebenen Kreiſes; nämlich:

1) $\cos BMD = \cos BD \, . \sin MBD,$

oder $\cos \mathfrak{A} = \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}(C+B-A);$

2) $\sin BMD = \dfrac{\cos MBD}{\cos MD}$

oder $\sin \mathfrak{A} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin v'};$

3) $\operatorname{tang} BMD = \dfrac{\operatorname{tang} BD}{\sin BD}$

oder $\operatorname{tang} \mathfrak{A} = \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{\cos v'};$

4) $\sin \mathfrak{A} = \dfrac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin r};$

5) $\cos \mathfrak{A} = \operatorname{cotg} v' \operatorname{cotg} r;$

6) $\operatorname{cotg} \mathfrak{A} = \cos r \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C+B-A).$

Setzt man in (1.) für $\sin \frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} b \cos A}{\cos \frac{1}{2} a} \quad (\text{§. } 37, 26.)$$

ſo erhält man:

7) $\cos \mathfrak{A} = \cos A \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c.$

Hieraus iſt erſichtlich, daß, und unter welcher Bedingung, $\mathfrak{A}$ kleiner, eben ſo groß oder größer als A ſein kann. Setzt man in (1.) für $\sin \frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} c + \sin^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} a - 1}{4 \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a} \quad (\text{§. } 36, 20.)$$

ſo erhält man durch die Seiten ausgedrückt:

8) $\cos \mathfrak{A} = \dfrac{\sin^2 \frac{1}{2} c + \sin^2 \frac{1}{2} b - \sin^2 \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}.$

Digitized by Google

Subſtituirt man in No. 4. für $\sin r$ den Ausdruck

$$\frac{2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c}{g} \quad (\S.\ 59,\ \text{Zuſ. } 3.)$$

ſo erhält man ebenfalls durch die Seiten ausgedrückt:

$$9) \quad \sin \mathfrak{A} = \frac{a}{2 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c}..$$

Dieſe und die vorhergehende Formel ſind die bekannten Formeln der ebnen Trigonometrie, da die Seiten des Sehnendreieckes reſp. $2 \sin \frac{1}{2} a$, $2 \sin \frac{1}{2} b$, $2 \sin \frac{1}{2} c$ ſind. Setzt man in (1.) für $\cos \frac{1}{2} a$ den §. 29, (1.) aufgeſtellten Werth, ſo erhält man durch die Winkel des ſphäriſchen Dreieckes ausgedrückt:

$$10) \cos \mathfrak{A} = \sin \tfrac{1}{2}(C+B-A) \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2}(A+B-C) \cos \tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C}};$$

Zuſ. 1. Aus $\operatorname{cotg} \mathfrak{A} = \cos r . \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C+B-A)$;
und $\operatorname{cotg} \mathfrak{B} = \cos r . \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C+A-B)$;
$\operatorname{cotg} \mathfrak{C} = \cos r . \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B-C)$;
folgt $\operatorname{tang} \mathfrak{A} : \operatorname{tang} \mathfrak{B} : \operatorname{tang} \mathfrak{C} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(C+B-A) : \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(C+A-B) : \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(A+B-C)$;

Zuſ. 2. Um unter den ſphär. Peripheriewinkeln, welche auf dem Bogen BC ſtehen, denjenigen zu finden, der dem Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$ gleich iſt; konſtruire man zwei Gegenkreiſe, den einen durch B und C, den andern durch den Mittelpunkt M. Letzterer ſchneidet den Nebenkreis ABC in zwei Punkten A und A′ (Fig. 39.). Zieht man nach einem von dieſen, etwa A, die Bogen BA, CA; ſo iſt der Winkel $BAC = \mathfrak{A}$. Denn in dem Dreiecke ABC iſt die Winkelſumme $A+B+C = 2A+U$, wenn durch U die Summe der Winkel MBC, MCB bezeichnet wird. In dem Dreiecke BMC iſt die Winkelſumme $= BMC + U = 2\mathfrak{A} + U$. Da nun die Dreiecke ABC, MBC zwiſchen einerlei Gegenkreiſen liegen, ſo ſind die Flächenräume, alſo auch die Winkelſummen beider gleich. Aus $2A + U = 2\mathfrak{A} + U$ folgt nun: $A = \mathfrak{A}$. Ebenſo iſt $BA'C = \mathfrak{A}$.

Da die ſphär. Peripheriewinkel auf einer und derſelben

Sehne deſto kleiner werden, je ſchiefer ſie auf der Sehne ſtehen; ſo haben diejenigen, welche größer als 𝔄 ſind, ihre Scheitel auf dem Bogen ADA′; diejenigen welche kleiner als 𝔄 ſind, innerhalb AC und A′B.

Der ſphär. Peripheriewinkel in dem kleinern Abſchnitte BEC iſt immer größer, als der Sehnenwinkel deſſelben Abſchnittes. Denn wird letzterer mit 𝔈 bezeichnet; ſo iſt $\mathfrak{E}+\mathfrak{A} = \pi$; aber $E+A>\pi$; alſo, da $A=\mathfrak{A}$; muß $E>\mathfrak{E}$ ſein.

Iſt BC ein Durchmeſſer, ſo fallen die durch B, C und durch M beſchriebenen Gegenkreiſe in einen Hauptkreis zuſammen; der Bogen AC verſchwindet und fällt in die Tangente im Endpunkte des Durchmeſſers. Der Peripheriewinkel BAC iſt dann der kleinſte auf dem Durchmeſſer, der ein Rechter, alſo gleich dem Sehnenwinkel des Halbkreiſes iſt (g. S. §. 75, Zuſ. 8.).

§. 80.

Aufgabe. Die Winkel des zu einem gegebenen ſphäriſchen Dreiecke gehörigen Sehnendreieckes durch Bogen auf der Kugelfläche darzuſtellen.

Auflöſung. Es ſei das ſphäriſche Dreieck ABC (Fig. 37.) gegeben. Um den Winkel 𝔄 des zugehörigen Sehnendreieckes auf die verlangte Weiſe darzuſtellen, verlängere man die Seiten AB, AC bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte in A′; halbire die Verlängerungen BA′, CA′ in E, F; ſo iſt der Bogen $EF=\mathfrak{A}$.

Beweis 1. In dem Dreiecke A′EF iſt:

$$\cos EF = \cos A'.\sin EA'.\sin FA' + \cos EA'.\cos FA';$$

Da nun BA′, CA′, die Supplemente von BA, CA oder c, b ſind; ſo iſt $EA'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}c$; $FA'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}b$; alſo $\cos EF=\cos A'\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$. Nach vorigem §. iſt aber auch $\cos\mathfrak{A}$ demſelben Ausdrucke gleich; alſo iſt $EF=\mathfrak{A}$.

Beweis 2. Der um das Dreieck ABC beſchriebene

Kreis iſt einer der Gegenkreiſe, zwiſchen denen das Nebendreieck A'BC in Rückſicht der Grundſeite BC liegt. Nach §. 63, Zuſ. 1. iſt nun der Bogen EF, der die Mittelpunkte der Seiten BA', CA' verbindet, die Hälfte des Zentriwinkels BMC, der auf der Grundſeite BC ſteht; und, wie im vorigen §. erwieſen wurde, iſt der Sehnenwinkel 𝔄 ebenfalls die Hälfte deſſelben Zentriwinkels. Daraus folgt, daß EF = 𝔄.

Zuſ. Vollendet man die Hauptkreiſe, deren Bogen das Dreieck ABC bilden, ſo erhält man (Fig. 40.) die Nebendreiecke deſſelben, ABC', ACB', BCA' und die Gegendreiecke dieſer vier. Konſtruirt man nun um den Mittelpunkt M des um ABC beſchriebenen Kreiſes den Hauptkreis EFGE'F'G', ſo halbirt dieſer nach §. 62. die Seiten BA', CA'; AB', CB'; AC', BC'. Daher ſind die Bogen EF, GE', F'G' der Reihe nach den Winkeln 𝔄, 𝔅, ℭ des Sehnendreieckes von ABC gleich.

§. 81.

Aufgabe. Die Neigung der Ebnen des Sehnendreieckes gegen die Ebnen der Seiten des ſphäriſchen Dreieckes durch Formeln zu beſtimmen.

Auflöſung. Der Neigungswinkel des Sehnendreieckes gegen die Ebnen der Seite BC oder a (Fig. 37.) iſt dem Komplemente des Perpendikels MD, das vom Mittelpunkte des umgeſchriebenen Kreiſes auf a gefällt wird, gleich (g. S. §. 45.). Bezeichnet man alſo dieſen Winkel mit v', ſo erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke MDB, in welchem $MD = \frac{1}{2}\pi - v'$; $BD = \frac{1}{2}a$; $BM = r$; $DBM = \frac{1}{2}(C + B - A)$; $BMD = \mathfrak{A}$ iſt, folgende Gleichungen zwiſchen v' und je zwei der genannten Größen:

1) $\cotg \frac{1}{2}v' = \sin \frac{1}{2}a . \tang \frac{1}{2}(C + B - A)$;

2) $\cotg \frac{1}{2}v' = \cos \mathfrak{A} . \tang r$;

3) $\sin v' = \frac{\cos r}{\cos \frac{1}{2}a}$;

4) $\sin v' = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin\mathfrak{A}}$;

5) $\cos v' = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\mathfrak{A}}$;

6) $\cos v' = \sin r \sin\frac{1}{2}(C+B-A)$;

Um v' durch die Seiten des Dreieckes auszudrücken, ſetze man in (1.) für $\text{tang}\,\frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{g}$$

ſo erhält man:

7) $\text{cotg}\,v' = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$;

$= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}a)$;

Oder ſetzt man in (6.) für $\sin r$ und $\sin\frac{1}{2}(C+B-A)$ reſp. die Werthe: $\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g}$ (§. 59.)

und $\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

ſo erhält man:

8) $\cos v' = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{g}(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$.

Aus (7.) und (8.) folgt:

9) $\frac{\cos v'}{\text{cotg}\,v'} = \sin v' = \frac{g}{\cos\frac{1}{2}a\,.\,g}$;

Zuſ. Sind v'', v''' die Neigungswinkel des Sehnendreieckes mit den Seiten b, c ſo iſt nach (3.):

$\sin v'' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}b}$; $\sin v''' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}c}$; daher:

$$\sin v' : \sin v'' : \sin v''' = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}a} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus (6.) folgt eben ſo:

$$\cos v' : \cos v'' : \cos v''' = \sin\frac{1}{2}(B+C-A) : \sin\frac{1}{2}(A+C-B) : \sin\frac{1}{2}(A+B-C);$$

und aus (2.):

$$\text{tang}\,v' : \text{tang}\,v'' : \text{tang}\,v''' = \cos\mathfrak{A} : \cos\mathfrak{B} : \cos\mathfrak{C}.$$

§. 82.

Aufgabe. Den Neigungswinkel der Ebnen zweier Polar-Sehnendreiecke zu berechnen.

Auflöſung. Es ſei (Fig. 38.) M der (ſphär.) Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beſchriebenen und m der Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes; ſo iſt Mm das Supplement des geſuchten Neigungswinkels, inſofern als ſolcher derjenige genommen wird, welcher zwiſchen den dem Mittelpunkte der Kugel zugekehrten (oder auch abgekehrten) Seiten der Kreisebnen enthalten iſt (g. S. §. 46.).

Um Mm oder deſſen Supplement zu beſtimmen, fälle man von M und m auf BC die Perpendikel MD, md, welche über M und m verlängert in dem Pole P der Seite BC ſich ſchneiden und von denen jenes die Seite BC in D halbirt, das andere aber im Berührungspunkte d des eingeſchriebenen Kreiſes trifft. Es iſt daher md der ſphär. Halbmeſſer ϱ des eingeſchriebenen Kreiſes; MD das Komplement des Neigungswinkels v' des Sehnendreieckes und der Ebne von BC. In dem Dreiecke PMm iſt nun:

$$\cos Mm = \cos MPm . \sin MP . \sin mP + \cos MP . \cos mP;$$

daher, wenn man für den Winkel MPm den gleichen Bogen Dd nimmt, v' für MP, $(\frac{1}{2}\pi - \varrho)$ für mP ſetzt und den geſuchten Neigungswinkel mit V bezeichnet,

$$-\cos V = \cos Dd . \sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho.$$

Da BC in D halbirt iſt, ſo iſt:

$$Dd = \tfrac{1}{2}BC - dC = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a+b-c); \text{ (§. 60.)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-b);$$

daher $-\cos V = \cos\frac{1}{2}(c-b) \sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho;$ (1.)

Nach vorigem §. iſt $\sin v' = \dfrac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}a}$; und

$$\cos v' = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(C+B-A);$$
$$= \sin r \frac{(\sin^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}a - 1)}{2\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}a)};$$

Dies in (1.) eingeſetzt giebt:

$$-\cos V = \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b).\cos r \cos\rho}{\cos\frac{1}{2}a}$$
$$+\frac{(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a-1)}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a}\sin r\sin\rho;$$

Ferner iſt: $\cos r\cos\rho = \frac{\sin r\sin\rho}{\tang r\tang\rho}$

$$=\frac{\sin r\sin\rho\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c};\quad (§. 60.)$$

daher $-\cos V = \Big(\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}$

$$+\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a-1\Big)\frac{\sin r\sin\rho}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a};$$

$$=\Big\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}a(\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a-1)\Big\}\frac{\sin r.\sin\rho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$=\Big\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}a(\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\cos\tfrac{1}{2}(c+b))\Big\}\frac{\sin r\sin\rho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$=\frac{\{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)-\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(c+b)\}\cos\frac{1}{2}(c-b)+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\rho;$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\rho;$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)+\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\rho;$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin c+\sin b)+\frac{1}{2}\sin a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\rho;$$

$$=\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\rho;\quad (2.)$$

Aus $\tang r\tang\rho = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$

erhält man:

$$\frac{\sin r\sin\rho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos r\cos\rho}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)};$$

Dies in (2.) ſubſtituirt giebt:

$$-\cos V = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c)} . \cos r \cos \varrho; \quad (3.)$$

Verwechſelt man das Dreieck ABC mit ſeinem Polardreiecke, was in Rückſicht auf V gleichgültig iſt; ſo erhält man, indem für r, ϱ deren Komplemente eintreten:

$$-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} . \cos r \cos \varrho; \quad (4.)$$

$$-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{-2 \cos \frac{1}{2}(A+B+C)} . \sin r \sin \varrho; \quad (5.)$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2 \sin \frac{1}{2} T} . \sin r \sin \varrho .$$

Um V unabhängig von r und ϱ auszudrücken, können die für sin r, cos r, sin ϱ, cos ϱ aus §. 59. und §. 60. bekannten Werthe in obigen Formeln eingeſetzt werden. Aus (2.) erhält man dann:

$$-\cos V = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2\,\mathfrak{g}} . \frac{G}{\mathfrak{G}}; \quad (6.)$$

aus (4.) $-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2\mathfrak{G}} . \frac{g}{\mathfrak{g}}$; (7.)

Digitized by Google

Anhang I.

A. Differenzialformeln für ſphäriſche Dreiecke.

§. 83.

Da zur Beſtimmung eines ſphäriſchen Dreieckes drei Stücke erforderlich ſind, ſo iſt jeder Winkel und jede Seite deſſelben eine Funktion dreier von einander unabhängiger Größen und es läßt ſich daher die Veränderung, welche jene erleiden, wenn dieſe vergrößert oder verkleinert werden, nach demſelben Geſetze beſtimmen, nach welchem die Differenz einer von mehreren veränderlichen Größen abhängigen Funktion durch die Differenzen der letzteren ausgedrückt wird. Die Aufſuchung der Verhältniſſe, in welchen dieſe abhängigen und unabhängigen Veränderungen in ſphäriſchen Dreiecken zu einander ſtehen und die Beſtimmung des Einfluſſes der Lage und der Größe dabei iſt nicht nur an ſich von Intereſſe, ſondern auch bei Anwendungen der ſphär. Trigonometrie auf aſtronomiſche und geodätiſche Meſſungen — zur Beurtheilung der Schärfe der durch Meſſung und Rechnung erhaltenen Reſultate, zur Korrektion von Fehlern, zur Beſtimmung derjenigen Stücke und Lagen, welche bei der Meſſung die geringſten Fehler veranlaſſen, zur Interpolation u. ſ. w. — wichtig und nothwendig.

Bekanntlich läßt ſich die Differenz $\varDelta A$, um welche eine von den veränderlichen Größen a, b, c abhängige Funktion A

wächſt, wenn dieſe reſp. um die Differenzen Δa, Δb, Δc, zunehmen, nach Potenzen dieſer Differenzen ſo ausdrücken:

$$\Delta A = \frac{dA}{da}.\Delta a + \frac{dA}{db}.\Delta b + \frac{dA}{dc}.\Delta c$$
$$+ \frac{d^2A}{da^2}.\frac{\Delta a^2}{1.2} + \frac{d^2A}{da.db}.\Delta a.\Delta b + \ldots\ldots$$

Nach dieſer Reihe läßt ſich z. B. aus der Gleichung $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ die Differenz des Winkels A durch die Differenzen der Seiten a, b, c ausdrücken, da zur Beſtimmung der Koeffizienten der Differenzenreihe nur ein wiederholtes Differenziiren jener Gleichung nöthig iſt. Wollte man indeß auch nur die Glieder der drei erſten Grade dieſer Reihe vollſtändig entwickeln, ſo würden die Formeln ſchon weitläufig werden und, die Differenzen jedes Winkels und jeder Seite aus den Differenzen je dreier Stücke zu finden, würde eine bedeutende Menge ſolcher Formeln nöthig machen. Selten aber möchte von denſelben ein vortheilhafter Gebrauch zu machen ſein. Deſto häufiger aber werden die Glieder des erſten Grades mit Nutzen gebraucht. Wir beſchränken uns daher hier auf die Beſtimmung der Differenzialkoeffizienten des erſten Grades um ſo mehr, als eine weitere Anwendung der Differenzialrechnung auf die ſphäriſche Geometrie nicht hieher gehört.

§. 84.

Aufgabe. Aus den Differenzialen je dreier Stücke eines ſphäriſchen Dreieckes das Differenzial jedes der übrigen Stücke zu finden.

Auflöſung. Um von den Differenzialen der Seiten und Winkel:

da, db, dc, dA, dB, dC

jedes durch drei der übrigen auszudrücken, werden Gleichungen zwiſchen je vier dieſer Elemente erfordert und zwar 15 Gleichungen, da 15 Verbindungen zu vieren aus den ge-

nannten 6 Elementen möglich ſind. Aus dem §. 11. angeführten Grunde indeß müſſen ſich auch dieſe 15 Gleichungen auf vier weſentlich verſchiedene reduziren, ſo daß nur für die Quaternionen:

I) da, db, dc, dA;

II) da, db, dA, dB;

III) da, db, dA, dC;

IV) da, dA, dB, dC;

Gleichungen zu finden ſind, aus denen ſich die übrigen durch Vertauſchung der Seiten und Winkel ergeben. Um dieſe Gleichungen darzuſtellen braucht man nur die für die Quaternionen a, b, c, A; — a, b, A, B; — a, b, A, C; — a, A, B, C; — vorhandenen vier Hauptgleichungen nach allen in denſelben enthaltenen Größen zu differenziiren; woraus ſich ſchließen läßt, daß von den dadurch erhaltenen vier Haupt-Differenzialgleichungen nicht nur die vierte ſich mittelſt des Polardreieckes auf die erſte reduziren läßt, ſondern daß auch die zweite und dritte auf der erſten beruhen muß; ſo daß dieſe als Fundamentalgleichung zu betrachten iſt und überhaupt nur drei von einander unabhängige allgemeine Gleichungen für die Differenziale der Seiten und Winkel vorhanden ſind.

I) Für die Elemente a, b, c, A iſt nun die Gleichung:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = 0$$

differenziirt man dieſe, ſo erhält man:

$$-\sin a \, . \, da + \sin b \cos c \, . \, db + \cos b \sin c \, . \, dc$$
$$- \cos b \sin c \cos A \, . \, db - \sin b \cos c \cos A \, . \, dc$$
$$+ \sin b \sin c \sin A \, . \, dA = 0;$$

geordnet:

$$-\sin a \, . \, da + (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \, db$$
$$+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \, dc$$
$$+ \sin b \sin c \sin A \, . \, dA = 0;$$

Die Koeffizienten zu db, dc erhält man nach §. 24., A.6, A.5, einfacher. Denn es iſt dort:

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C;$$
$$\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin a \cos B;$$

Man erhält alſo:

$$-\sin a \,.\, da + \sin a \cos C \,.\, db + \sin a \cos B \,.\, dc$$
$$+ \sin b \sin c \sin A \,.\, dA = 0;$$

Dividirt man hier alles mit sin a und ſetzt $\frac{\sin C}{\sin c}$ für $\frac{\sin A}{\sin a}$, ſo ergiebt ſich die Fundamentalgleichung:

$$-da + \cos C \,.\, db + \cos B \,.\, dc + \sin b \sin C \,.\, dA = 0;$$

II) Für die Quaternion a, b, A, B iſt die Gleichung:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

Nimmt man, um bequemer zu differenziiren, Logarithmen, ſo iſt:

$$\log \sin a - \log \sin b = \log \sin A - \log \sin B;$$

und man erhält ſogleich:

$$\operatorname{cotg} a \,.\, da - \operatorname{cotg} b \,.\, db = \operatorname{cotg} A \,.\, dA - \operatorname{cotg} B \,.\, dB;$$

III) Die Gleichung für a, b, A, C iſt:

$$\operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C - \cos b \cos C = 0;$$

Durch Differenziirung erhält man:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a} \,.\, da + \operatorname{cotg} a \cos b \,.\, db + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \,.\, dA$$
$$- \operatorname{cotg} A \cos C \,.\, dC + \sin b \cos C \,.\, db + \cos b \sin C \,.\, dC = 0;$$

geordnet:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a} \,.\, da + (\operatorname{cotg} a \cos b + \sin b \cos C)\, db$$
$$+ \frac{\sin C}{\sin^2 A} \,.\, dA + (\cos b \sin C - \operatorname{cotg} A \cos C)\, dC = 0;$$

Nach §. 25., C.5, iſt nun:

$$\operatorname{cotg} a \cos b + \sin b \cos C = \frac{\sin C \operatorname{cotg} c}{\sin A}$$
$$= \frac{\sin c \,.\, \operatorname{cotg} c}{\sin a} = \frac{\cos c}{\sin a};$$

und nach §. 25., D.3 iſt:

$$\cos b \sin C - \operatorname{cotg} A \cos C = \frac{\sin b \operatorname{cotg} B}{\sin a}$$

$$= \frac{\sin B \cot g B}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Dieſe Werthe für die Koeffizienten zu db und dC ſubſtituirt:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a}.da + \frac{\cos c}{\sin a}.db + \frac{\sin C}{\sin^2 A}.dA$$
$$+ \frac{\cos B}{\sin A}.dC = 0;$$

oder, um gleiche Nenner zu erhalten:

$$-\frac{\sin B}{\sin a \sin A}.da + \frac{\cos c \sin A}{\sin a \sin A}.db + \frac{\sin c}{\sin a \sin A}.dA$$
$$+ \frac{\sin a \cos B}{\sin a \sin A}.dC = 0;$$

daher endlich die dritte Haupt-Differenzialgleichung:

$$-\sin B.da + \cos c \sin A.db + \sin c.dA$$
$$+ \sin a \cos B.dC = 0;$$

Einfacher ergiebt ſich dieſe Gleichung aus (I.) durch Elimination. Denn für die Quaternionen da, db, dc, dA und da, db, dc, dC hat man dort die Gleichungen:

$$-da + \cos C.db + \cos B.dc + \sin b \sin C.dA = 0; \ (\alpha)$$
$$-dc + \cos A.db + \cos B.da + \sin b \sin A.dC = 0; \ (\beta)$$

Setzt man den aus (β) für dc ſich ergebenden Werth in (α) ein, ſo erhält man geordnet:

$$-(1 - \cos^2 B)\,da + (\cos C + \cos A \cos B)\,db$$
$$+ \sin c \sin B.dA + \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

Nun iſt: $\cos C + \cos A \cos B = \cos c \sin A \sin B$; (§. 15.) alſo:

$$-\sin^2 B.da + \cos c \sin A \sin B.db + \sin c \sin B.dA$$
$$+ \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

woraus nach Diviſion mit sin B die obige Gleichung folgt.

IV) Die Gleichung von (I.) auf das Neben-Polardreieck

$$\left\{\begin{matrix} a & b & \bar{c} \\ A & B & \bar{C} \\ a & b & \bar{c} \end{matrix}\right\}$$ bezogen giebt:

$$-dA + \cos\bar{c}.dB + \cos b.d\bar{C} + \sin B \sin\bar{c}.da = 0;$$

d. i. $-dA - \cos c.dB - \cos b.dC + \sin B \sin c.da = 0;$

oder $dA + \cos c.dB + \cos b.dC - \sin B \sin c.da = 0;$

Aus dieſen vier Hauptgleichungen erhält man durch Vertauſchung für die aus den Elementen da, db, dc, dA, dB, dC möglichen 15 Quaternionen folgende 15 Gleichungen zur Löſung obiger Aufgabe:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ -da+\cos C.db+\cos B.dc+\sin b\sin C.dA=0;\\
2)\ -db+\cos C.da+\cos A.dc+\sin a\sin C.dB=0;\\
3)\ -dc+\cos B.da+\cos A.db+\sin a\sin B.dC=0;
\end{array}\right\}\text{(I.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
4)\ \cot g\,a.da-\cot g\,b.db=\cot g A.dA-\cot g B.dB;\\
5)\ \cot g\,a.da-\cot g\,c.dc=\cot g A.dA-\cot g C.dC;\\
6)\ \cot g\,b.db-\cot g\,c.dc=\cot g B.dB-\cot g C.dC;
\end{array}\right\}\text{(II.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
7)\ -\sin B.da+\cos c\sin A.db+\sin c.dA\\
\qquad+\sin a\cos B.dC=0;\\
8)\ -\sin C.da+\cos b\sin A.dc+\sin b.dA\\
\qquad+\sin a\cos C.dB=0;\\
9)\ -\sin A.db+\cos c\sin B.da+\sin c.dB\\
\qquad+\sin b\cos A.dC=0;\\
10)\ -\sin C.db+\cos a\sin B.dc+\sin a.dB\\
\qquad+\sin b\cos C.dA=0;\\
11)\ -\sin A.dc+\cos b\sin C.da+\sin b.dC\\
\qquad+\sin c\cos A.dB=0;\\
12)\ -\sin B.dc+\cos a\sin C.db+\sin a.dC\\
\qquad+\sin c\cos B.dA=0;
\end{array}\right\}\text{(III.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
13)\ dA+\cos c.dB+\cos b.dC-\sin b\sin C.da=0;\\
14)\ dB+\cos c.dA+\cos a.dC-\sin a\sin C.db=0;\\
15)\ dC+\cos b.dA+\cos a.dB-\sin a\sin B.dc=0;
\end{array}\right\}\text{(IV.)}$$

§. 85.

Diejenigen drei Stücke des Dreieckes, von welchen als unabhängig veränderlichen die übrigen als Funktionen betrachtet werden, können ſein:

1) drei Seiten; 2) zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel; 3) zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel; 4) drei Winkel; 5) zwei Winkel und die anliegende Seite; 6) zwei Winkel und eine der gegenüber liegenden Seiten.

Hiernach laſſen ſich nun die Differenzialkoeffizienten für die abhängigen Stücke aus obigen Gleichungen ſo zuſammen ſtellen:

I) Unabhängig a, b, c.

Man findet dA, dB, dC reſp. aus No. 1, 2, 3 und zwar:

1) $\frac{dA}{da} = \frac{1}{\sin b \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin B}$;

$\frac{dA}{db} = \frac{-\cos C}{\sin b \sin C} = \frac{-\cotg C}{\sin b}$;

$\frac{dA}{dc} = \frac{-\cos B}{\sin b \sin C} = \frac{-\cotg B}{\sin c}$;

Hieraus durch Verwechſelung:

2) $\frac{dB}{da} = \frac{-\cotg C}{\sin a}$;

$\frac{dB}{db} = \frac{1}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin A}$;

$\frac{dB}{dc} = \frac{-\cotg A}{\sin c}$;

3) $\frac{dC}{da} = \frac{-\cotg B}{\sin a}$; $\frac{dC}{db} = \frac{-\cotg A}{\sin b}$;

$\frac{dC}{dc} = \frac{1}{\sin b \sin A} = \frac{1}{\sin a \sin B}$;

II) Unabhängig a, b, C.

Es findet ſich dc, dA, dB aus No. 3, 7, 9.

1) $\frac{dc}{da} = \cos B$; $\frac{dc}{db} = \cos A$;

$\frac{dc}{dC} = \sin a \sin B = \sin b \sin A$;

2) $\frac{dA}{da} = \frac{\sin B}{\sin c}$; $\frac{dA}{db} = -\cotg c \sin A$;

$\frac{dA}{dC} = \frac{-\sin a \cos B}{\sin c}$;

3) $\frac{dB}{da} = -\cotg c \sin B$; $\frac{dB}{db} = \frac{\sin A}{\sin c}$;

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\sin b \cos A}{\sin c};$$

III) Unabhängig a, b, A.

Man erhält dc, dB, dC aus 1, 4, 7.

1) $\frac{dc}{da} = \frac{1}{\cos B}$; $\frac{dc}{db} = -\frac{\cos C}{\cos B}$;

$$\frac{dc}{dA} = \frac{-\sin b \sin C}{\cos B} = -\sin c \operatorname{tang} B;$$

2) $\frac{dB}{da} = \frac{-\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} a}$; $\frac{dB}{db} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} b}$;

$$\frac{dB}{dA} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A};$$

3) $\frac{dC}{da} = \frac{\operatorname{tang} B}{\sin a}$;

$$\frac{dC}{db} = \frac{-\cos c \operatorname{tang} B}{\sin b} = \frac{-\operatorname{cotg} c \sin C}{\cos B};$$

$$\frac{dC}{dA} = -\frac{\sin c}{\sin a \cos B};$$

IV) Unabhängig A, B, C.

Es ergiebt ſich da, db, dc aus 13, 14, 15.

1) $\frac{da}{dA} = \frac{1}{\sin b \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin B}$;

$\frac{da}{dB} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\sin B}$; $\frac{da}{dC} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\sin C}$;

2) $\frac{db}{dA} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\sin A}$; $\frac{db}{dB} = \frac{1}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin A}$;

$\frac{db}{dC} = \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin C}$;

3) $\frac{dc}{dA} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\sin A}$; $\frac{dc}{dB} = \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin B}$;

$\frac{dc}{dC} = \frac{1}{\sin a \sin B} = \frac{1}{\sin b \sin A}$;

V) Unabhängig A, B, c.

Man erhält dC, da, db aus 15, 8, 10.

Digitized by Google

1) $\frac{dC}{dA} = -\cos b$; $\frac{dC}{dB} = -\cos a$;

$\frac{dC}{dc} = \sin a \sin B = \sin b \sin A$;

2) $\frac{da}{dA} = \frac{\sin b}{\sin C}$; $\frac{da}{dB} = \sin a \operatorname{cotg} C$;

$\frac{da}{dc} = \frac{\cos b \sin A}{\sin C}$;

3) $\frac{db}{dA} = \sin b \operatorname{cotg} C$; $\frac{db}{dB} = \frac{\sin a}{\sin C}$;

$\frac{db}{dc} = \frac{\cos a \sin B}{\sin C}$;

VI) Unabhängig A, B, a.

Man findet db, dc, dC aus 4, 8, 13.

1) $\frac{db}{da} = \frac{\tang b}{\tang a}$; $\frac{db}{dB} = \frac{\tang b}{\tang B}$;

$\frac{db}{dA} = -\frac{\tang b}{\tang A}$;

2) $\frac{dc}{da} = \frac{\sin C}{\cos b \sin A}$; $\frac{dc}{dA} = -\frac{\tang b}{\sin A}$;

$\frac{dc}{dB} = -\frac{\sin c \operatorname{cotg} C}{\cos b}$;

3) $\frac{dC}{da} = \tang b \sin C$; $\frac{dC}{dA} = -\frac{1}{\cos b}$;

$\frac{dC}{dB} = -\frac{\cos c}{\cos b}$;

Wie von den hier aufgeführten Differenzialkoeffizienten, wenn unter den als unabhängig veränderlich angenommenen Stücken eins oder zwei unveränderlich ſind, die von denſelben herrührenden Koeffizienten wegfallen oder Null werden, iſt als bekannt vorauszuſetzen.

B. Reihen zur Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke.

§. 86.

Die in §. 37. unter Num. 33—40 angeführten Gleichungen laſſen ſich mit geringer Umwandlung auf die Form der Gleichung:

$$\operatorname{tang} y = \frac{n \sin x}{1 \pm n \cos x}$$

bringen, aus welcher y nach §. 7. durch eine nach den Sinus der vielfachen von x fortſchreitenden Reihe ausgedrückt werden kann. Die Gleichungen Num. 33—36 geben nämlich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \sin C}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (1.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-A-B+C+\pi) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \sin C}{1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (2.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B-C+\pi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \sin C}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (3.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-A+B-C+\pi) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \sin C}{1-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (4.)$$

Aus (1.) erhält man nach §. 7. II.

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b \sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}b \sin 4C + \ldots \quad (5.)$$

ein merkwürdiger Ausdruck für den Flächenraum des ſphäriſchen Dreieckes.

Aus (2.) erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(-A-B+C+\pi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b \sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C - \ldots\ldots \quad (6.)$$

und aus (3.), (4.) nach §. 7. I.

$$\tfrac{1}{2}(A-B-C+\pi) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b \sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C + \ldots\ldots \quad (7.)$$

$$\tfrac{1}{2}(-A+B-C+\pi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C + \ldots\ldots \quad (8.)$$

Damit die Reihe (5.) konvergire, muß:

$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b < 1$; oder

$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b < \cos\tfrac{1}{2}a \,.\, \cos\tfrac{1}{2}b$; alſo

$\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b > o$; d. i.

$\cos\tfrac{1}{2}(a+b) > 0$;

alſo $\tfrac{1}{2}(a+b) < \tfrac{1}{2}\pi$ oder $a+b<\pi$ ſein. Die Reihe konvergirt ſehr ſchnell, wenn a, b ſehr klein ſind. Die Reihe (6.) konvergirt, wenn $(a+b) > \pi$ iſt. Die Konvergenz der Reihe (7.) bedingt, daß:

$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b < 1$; oder

$\sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b < \cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b$; oder

$\cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b > 0$; d. i.

$\sin\tfrac{1}{2}(b-a) > 0$

alſo daß $b > a$ ſei.

In der Reihe (8.) muß umgekehrt $a > b$ ſein, wenn ſie konvergiren ſoll.

Zugleich können alſo die Reihen (5.) und (6.), ſo wie (7.) und (8.) nicht konvergiren; wohl aber (5.) und (7.), oder (5.) und (8.); ſo wie (6.) und (7.) oder (6.) und (8.). In jedem Falle werden demnach zwei konvergirende Reihen vorhanden ſein, aus denen die Winkel A und B gefunden werden können.

I) Iſt $a + b < \pi$ und $a < b$; ſo erhält man aus (5.) und (7.) durch Addition:

$$A = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b)\sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b)\sin 3C + \ldots. \quad (9.)$$

durch Subtraktion:

$$B = \pi - C - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b)\sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\sin 2C - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b)\sin 3C - \ldots. \quad (10.)$$

Iſt aber $a > b$; ſo verwechſelt man in (9.) und (10.) a, A mit b, B.

II) Iſt $a + b > \pi$ und $a < b$, ſo ergiebt ſich aus (6.) und (7.) durch Addition:

$$\pi - B = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a)\sin C$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a - \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a)\sin 2C$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b)\sin 3C + \ldots. \quad (11.)$$

durch Subtraktion:

$$A = C + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a)\sin C$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a)\sin 2C$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2} - \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}a)\sin 3C + \ldots. \quad (12.)$$

§. 87.

Für die dritte Seite c kann eine ähnliche Reihe aufgeſtellt werden, die ſich allgemein auf folgende Weiſe entwickeln läßt.

Wenn zwiſchen y und x die Gleichung:

$$y^2 = 1 + 2n\cos x + n^2 \quad (\alpha)$$

ſtatt findet, ſo iſt:

$$\log y = n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \ldots..$$

Denn ſetzt man in (α) für $\cos x$ den exponentiellen Ausdruck:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad (\S.\ 6,\ \text{VI.})$$

ſo erhält man:

$$y^2 = 1 + n(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) + n^2;$$
$$= 1 + n(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) + ne^{x\sqrt{-1}}.ne^{-x\sqrt{-1}};$$
$$= (1 + ne^{x\sqrt{-1}})(1 + ne^{-x\sqrt{-1}});$$

Daher iſt:

$$2\log y = \log(1 + ne^{x\sqrt{-1}}) + \log(1 + ne^{-x\sqrt{-1}});$$
$$= ne^{x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}n^2e^{2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3e^{3x\sqrt{-1}} - \ldots...$$
$$+ ne^{-x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}n^2e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3e^{-3x\sqrt{-1}} - \ldots...$$

daher, wenn die Glieder beider Reihen nach Potenzen von n zuſammengezogen und mit 2 dividirt werden:

$$\log y = n.\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} - \tfrac{1}{2}n^2.\frac{e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}}{2}$$
$$+\tfrac{1}{3}n^3.\frac{e^{3x\sqrt{-1}}+e^{-3x\sqrt{-1}}}{2} - \ldots\ldots$$
$$= n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \ldots.$$

Für negative Werthe von n wird alſo aus der Gleichung:

$$y^2 = 1 - 2n\cos x + n^2 \quad (\beta)$$

die Reihe folgen:

$$\log y = -n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\cos 2x - \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \ldots.$$

Auf die Form der Gleichungen (α) und (β) läßt ſich nun die Gleichung:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \quad (\gamma)$$

bringen, wenn man beide Theile von 1 ſubtrahirt oder dazu addirt. Letzteres giebt:

$$1 + \cos c = 1 + \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \quad \text{oder}$$
$$2\cos^2\tfrac{1}{2}c = 2\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b + 2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b + \sin a \sin b \cos C;$$

Jenachdem man auf beiden Seiten mit $2\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b$, oder mit $2\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$ dividirt, erhält man unter der Form der Gleichung (α):

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b} = 1 + 2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (13.)$$

oder

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b} = 1 + 2\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (14.)$$

Durch Subtraktion erhält man aus (γ):

$$1 - \cos c = 1 - \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C; \quad \text{oder}$$
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}c = 2\sin^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b + 2\cos^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b - \sin a \sin b \cos C;$$

und hieraus, wenn man mit $2\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$, oder mit $2\sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b$ dividirt, die Gleichungen:

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b} = 1 - 2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (15.)$$

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b} = 1 - 2\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b\,; \quad (16.)$$

die beide von der Form der Gleichung (β) ſind.

Durch Anwendung der für (α) und (β) gefundenen Reihen auf vorſtehende Gleichungen ergiebt ſich nun aus No. 13.

$$\log\left(\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}\right) = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots.$$

daher:

$$\log\cos\tfrac{1}{2}c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}b) + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (17.)$$

Aus No. 14, 15, 16.

$$\log\cos\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b) + \mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\mathrm{ctg}^3\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (18.)$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b) - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C - \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (19.)$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b) - \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C - \tfrac{1}{3}\mathrm{ctg}^3\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (20.)$$

Man wird leicht bemerken, daß die letzten drei Reihen aus der erſten (17.), durch Anwendung derſelben auf die Nebendreiecke ($\alpha\beta\bar{\gamma}$), ($\alpha\bar{\beta}\gamma$), ($\bar{\alpha}\beta\gamma$), folgen. Die Reihe in (17.) iſt konvergent, wenn $a + b < \pi$ iſt; die folgende, wenn $a+b > \pi$; die Reihe (19.), wenn $a < b$; und (20.), wenn $a > b$ iſt.

Subtrahirt man (19.) von (17.), ſo findet ſich:

$$\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}c = \log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a(\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b)\cos C + \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}b - \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\cos 2C + \ldots \quad (21.)$$

Subtrahirt man (19.) von (18.), ſo erhält man:

$$\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}c = \log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a + \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}b(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a + \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}a)\cos C + \tfrac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}b(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}a)\cos 2C + \ldots \quad (22.)$$

Iſt $a+b < \pi$ und $a < b$; ſo konvergirt (21.); iſt $a+b > \pi$ und $a < b$; ſo iſt (22.) konvergent. In beiden Reihen iſt a und b zu vertauſchen, wenn $a > b$ iſt, damit die Reihen konvergiren.

§. 88.

Wie durch die hier entwickelten Reihen aus zwei Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel die übrigen Stücke des Dreieckes gefunden werden; ſo laſſen ſie ſich auch für den Fall, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben ſind, anwenden. Denn bezieht man dieſelben auf das Neben-Polardreieck $\left\{\begin{matrix} a\,b\,\bar{c} \\ A\,B\,\bar{C} \\ a\,b\,\bar{c} \end{matrix}\right\}$, ſo erhält man ſogleich aus (5)—(8).

$$\pi - \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B \sin c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cot^2\tfrac{1}{2}A \cot^2\tfrac{1}{2}B \sin 2c + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B \sin 3c \ldots. \quad (23.)$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \sin c + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B \sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B \sin 3c + \ldots. \quad (24.)$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b+c) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B \sin c - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A \operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}B \sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B \sin 3c + \ldots. \quad (25.)$$
$$\tfrac{1}{2}(-a+b+c) = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \sin c - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B \sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B \sin 3c - \ldots. \quad (26.)$$

Die Bedingungen der Konvergenz ſind hier dieſelben, wie dort (§. 86.)

Für den Fall, wenn $A+B<\pi$ und $A<B$, erhält man aus (9.) und (10.)

$$a = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B - \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B)\sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B)\sin 3c + \ldots. \quad (27.)$$
$$b = c + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B)\sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B - \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B)\sin 3c + \ldots. \quad (28.)$$

Und wenn $A+B>\pi$, $A<B$; aus (11.) und (12.)

$$\pi - b = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}A - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A)\sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A)\sin 3c + \ldots. \quad (29.)$$
$$a = \pi - c + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A)\sin c$$
$$- \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A + \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}A)\sin 2c$$
$$+ \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A - \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A)\sin 3c - \ldots. \quad (30.)$$

Für den dritten Winkel erhält man aus (17.)—(22.)

$$\log\sin\tfrac{1}{2}C=\log(\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)-\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}B\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}B\cos 2c$$
$$-\tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}B\cos 3c-\ldots\ldots \quad (31.)$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}C=\log(\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B)-\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}B\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}A\cos 2c$$
$$-\tfrac{1}{3}\mathrm{cotg}^3\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}^3\tfrac{1}{2}B\cos 3c-\ldots\ldots \quad (32.)$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}C=\log(\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)+\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}B\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}B\cos 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cotg}^3\tfrac{1}{2}B\cos 3c-\ldots\ldots \quad (33.)$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}C=\log(\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B)+\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}B\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}B\cos 2c-\ldots\ldots \quad (34.)$$

$$\log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}C=\log\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}B-\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}B+\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}B)\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}B-\mathrm{cotg}^2\tfrac{1}{2}B)\cos 2c-\ldots\ldots \quad (35.)$$

$$\log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}C=\log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A-\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}B(\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}A+\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A)\cos c$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}B(\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}A-\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}A)\cos 2c-\ldots\ldots \quad (36.)$$

Unter den §. 16. für das rechtwinklige Dreieck aufgeſtellten Formeln laſſen die unter II, IV, VI angeführten, die alle von der Form:

$$\tan z = p \tan u$$

ſind nach §. 7, V. dieſelbe Auflöſung in Reihen zu. Z. B. aus der Gleichung $\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$ erhält man

$$\tan(A-a)=\frac{\left(\frac{1-\sin b}{1+\sin b}\right)\sin 2a}{1-\left(\frac{1-\sin b}{1+\sin b}\right)\cos 2a};$$

$$=\frac{\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 2a}{1-\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\cos 2a};$$

und $\tan(A+a)=\frac{\mathrm{cotg}^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 2a}{1-\mathrm{cotg}^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 2a}$;

und hieraus die Reihen:

$$A-a=\mathrm{tg}^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 2a+\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^4(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 4a+\ldots$$
$$A+a=\mathrm{ctg}^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 2a+\tfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^4(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}b)\sin 4a+\ldots$$

C. Auflöſung ſehr kleiner ſphäriſcher Dreiecke.

§. 89.

Wenn die Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes im Verhältniß zu dem — als Lineareinheit angenommenen — Kugelradius ſehr klein ſind, ſo iſt das Dreieck ſehr wenig von einem ebnen verſchieden und man würde ſchon eine annähernde Auflöſung erhalten, wenn man daſſelbe für ein völlig ebnes nähme. Dabei würde aber der Flächenraum des ſphäriſchen Dreieckes, der den Ueberſchuß der Winkelſumme über zwei Rechte ausmacht, als Null behandelt. Eine genauere Auflöſung muß daher dieſen Ueberſchuß mit in Rechnung ziehen und dazu dient die hier zu entwickelnde, von Legendre gefundene, eben ſo einfache als intereſſante, Regel.

Sind die Seiten a, b, c eines ſphäriſchen Dreieckes ſehr klein, ſo kann man in der Formel:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

die Koſinus und Sinus derſelben nach den §. 6. angegebenen Reihen durch die Bogen ausdrücken, indem die über den vierten Grad hinaus gehenden Potenzen als verſchwindend weggelaſſen werden.

Es iſt dann:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4};$$

$$\cos b = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4};$$

$$\cos c = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4};$$

$$\sin b = b - \frac{b^3}{1.2.3}; \quad \sin c = c - \frac{c^3}{1.2.3};$$

Werden dieſe Werthe in der Formel für cos A eingeſetzt und nur die Glieder bis zum vierten Grade beibehalten, ſo ergiebt ſich:

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^4-b^4-c^4}{24}-\frac{b^2c^2}{4}}{bc\left(1-\frac{b^2}{6}-\frac{c^2}{6}\right)};$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit $1+\frac{b^2+c^2}{6}$ ſo erhält man:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bc};$$

Sind nun A′, B′, C′ die Winkel desjenigen ebnen Dreieckes, deſſen Seiten den Bogen a, b, c gleich ſind, ſo iſt:

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$4b^2c^2\sin^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4;$$

Daher iſt $\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6}\sin^2 A'$;

Setzt man nun $A = A' + x$, ſo iſt:

$$\cos A = \cos A' - \sin A' x - \cos A' \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

alſo $\cos A' - \frac{bc}{6}\sin^2 A' = \cos A' - \sin A' x - \cos A' \frac{x^2}{1.2} + \ldots$

mithin $\frac{bc\sin^2 A'}{6} = \sin A'.x + \cos A' \frac{x^2}{1.2} - \ldots.$

woraus hervorgeht, daß x vom zweiten Grade iſt. Läßt man daher x^2 als verſchwindend weg, ſo erhält man nahe bis zum vierten Grade genau:

$$\sin A'.x = \frac{bc.\sin^2 A'}{6}$$

und hieraus $x = \frac{bc.\sin A'}{6}.$

Nun iſt $\frac{bc\sin A'}{2}$ der Flächenraum des ebnen Dreieckes aus den Seiten a, b, c, der mit τ bezeichnet ſei. Da dieſer von dem des ſphäriſchen Dreieckes nur um eine Differenz des vierten Grades verſchieden iſt, ſo kann der eine für den

andern genommen werden und man hat mit derſelben Genauigkeit wie oben:

$$A = A' + \frac{1}{3}\tau;$$

Eben ſo erhält man $B = B' + \frac{1}{3}\tau$; $C = C' + \frac{1}{3}\tau$. Daraus ergiebt ſich der merkwürdige Satz:

Wenn die Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes ſehr klein ſind im Verhältniß zum Kugelradius, ſo iſt jeder Winkel deſſelben um den dritten Theil des Flächeninhaltes des ſphäriſchen Dreieckes größer als der entſprechende Winkel desjenigen ebnen Dreieckes, das mit dem ſphäriſchen gleiche Seiten hat.

Es kann alſo die Auflöſung eines ſphär. Dreieckes auf die eines ebnen zurückgeführt werden, wenn man für jenes ein ebnes ſubſtituirt, deſſen Seiten den des ſphäriſchen Dreieckes gleich, deſſen Winkel aber um $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes des ſphäriſchen oder des ebnen Dreieckes kleiner, als die Winkel in jenem, ſind.

§. 90.

Um den in Theilen des Kugelradius genommenen Flächenraum oder Winkelüberſchuß τ in Sekunden auszudrücken, multiplizirt man τ mit der Zahl der Sekunden, die auf den Kugelradius kommen. Bezeichnet man dieſe Zahl mit r, die Zahl der in τ enthaltenen Sekunden mit s, ſo iſt:

$$\tau = \frac{s}{r}; \text{ daher } s = r\tau;$$

Sind die Seiten des ſphäriſchen Dreieckes nach einer andern Lineareinheit (z. B. Ruthe) gemeſſen, die im Kugelradius R mal enthalten iſt, und iſt S der nach dieſer Einheit gemeſſene Flächenraum des Dreieckes, ſo iſt:

$$S = R^2\tau = \frac{R^2 s}{r};$$

daher .....
$$s = \frac{S \cdot r}{R^2}$$

Der Flächenraum S alſo, der aus den gegebenen Stücken des Dreieckes, indem man daſſelbe als eben betrachtet, leicht zu finden iſt, wird in Sekunden verwandelt, wenn man S mit dem beſtändigen Faktor $\frac{r}{R^2}$ multiplizirt; oder: zu dem Logarithmus von S iſt der beſtändige Logarithmus von $\frac{r}{R^2}$ zu addiren, um den Logarithmus von s zu erhalten.

Die Zahl r der in dem Halbmeſſer eines Kreiſes enthaltenen (Sexageſimal-) Sekunden iſt 206264,8 und

$$\log r = 5{,}3144251$$

Für die auf der Erdkugel entworfenen ſphäriſchen Dreiecke iſt in Ruthen (rheinl.) $R = 1691861{,}9$ daher:

$$\log \frac{r}{R^2} = 2{,}8576954 - 10;\ ^{*})$$

Addirt man alſo 2,8576954 zu log S und zieht von der Summe 10 Einer ab, ſo hat man log s. Es ſei z. B. in Ruthen $a = 35100$; $b = 28600$; $C = 110°\,40'$;

ſo iſt ...... $\log a = 4{,}5453071$

$\log \tfrac{1}{2} b = 4{,}1553360$

$\log \sin C = 0{,}9711132 - 1$

daher $\log S = 8{,}6717563$

dazu .... $2{,}8576954 - 10$

giebt ...... $\log s = 1{,}5294517$

$s = 33'',84$ daher $\tfrac{1}{3} s = 11'',28$.

Daher iſt $C' = C - \tfrac{1}{3}s = 110°\,39'\,48'',72$

---

*) Iſt eine andre Einheit zur Meſſung gebraucht worden, die n Ruthen enthält, ſo hat man zu obigem Logarithmus 2,8576954 — 10 noch 2 log n zu addiren. Z. B. für rheinl. Fuß (Duodez.) iſt $n = \frac{1}{12}$; daher in ſolchen Fußen $\log \frac{r}{R^2} = 0{,}6993329 - 10$.

In Pariſ. Fuß iſt $\log \frac{r}{R^2} = 0{,}7292131 - 10$.

In metres .... $= 1{,}7036649 - 10$.

Man hat alſo ein ebnes Dreieck aufzulöſen, in welchem gegeben iſt:

$$a = 35100$$
$$b' = 28600$$
$$C' = 110° 39' 48'', 72$$

Aus der Formel $\tang \frac{1}{2}(A' - B') = \frac{a - b}{a + b} \cotg \frac{1}{2} C'$

erhält man:

$$\frac{1}{2}(A' - B') = 4° 2' 12'', 58$$
$$\frac{1}{2}(A' + B') = 34° 40' 5'', 64$$
$$A' = 38° 42' 18'', 22$$
$$B' = 30° 37' 53'', 06$$

Zu dieſen Winkeln $\frac{1}{3}s$ addirt giebt:

$$A = 38° 42' 29'', 50$$
$$B = 30° 38' \; 4'', 34$$

Die dritte Seite c findet ſich aus der Formel $c = \frac{a . \sin C'}{\sin A'}$; man erhält:

$$c = 52521$$

§. 91

Dieſelbe Auflöſung läßt ſich auch auf ſphär. Dreiecke anwenden, in denen zwei Seiten dem Halbkreiſe ſehr nahe kommen. Denn ſind dies die Seiten a, b des Dreieckes $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}$, ſo ſind in dem Nebendreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\bar\gamma\\ \bar a\,\bar b\,c\\ \bar A\,\bar B\,C\end{matrix}\right\}$ die Seiten $\bar a$, $\bar b$ ſehr klein; auch c ſehr klein, da $c < \bar a + \bar b$ ſein muß. Das Dreieck $(\alpha\beta\bar\gamma)$ kann man daher wie oben durch ein ebnes Dreieck auflöſen und daraus die geſuchten Stücke von $(\alpha\beta\gamma)$ finden.

Eben ſo können ſphär. Dreiecke, in denen zwei Winkel ſehr klein ſind, aufgelöſt werden. Denn ſind in dem Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}$ die Winkel A, B ſehr klein, ſo ſind in

dem Neben-Polardreiecke $\begin{Bmatrix} a\,b\,\bar{c} \\ A\,B\,\bar{C} \\ a\,b\,\bar{c} \end{Bmatrix}$ die Seiten A, B, ſo wie auch die dritte $\bar{C}$ ſehr klein. Indem alſo $(ab\bar{c})$ auf die oben gezeigte Weiſe aufgelöſt wird, erhält man die Stücke von $(\alpha\beta\gamma)$.

Anhang II.

Einige Sätze als Ergänzung zum erſten Theile der Sphärik.

Anmerk. Die eingeklammerten Paragraphenzahlen beziehen ſich auf den erſten Theil und deuten an, wo dieſe Sätze einzuſchalten ſind.

§. 92. (§. 61 a.)

Lehrſatz. Jeder zwiſchen zwei Gegenkreiſen liegende Bogen eines Hauptkreiſes wird von dem jenen Gegenkreiſen parallelen Hauptkreiſe halbirt.

Beweis. Zwiſchen den Gegenkreiſen (Fig. 41.) ABC, A'B'C' liegender Bogen BB', der verlängert in B'', B''' zum zweitenmale von jenen, und in D, D' von dem zu den Polen M, M' der Gegenkreiſe gehörigen Hauptkreiſe EF geſchnitten wird. Da B'', D' die Gegenpunkte von B', D ſind, ſo iſt der Bogen B'D = B''D'.

Fällt man von M ein Perpendikel MG auf die sphär. Sehne BB'', ſo wird dieſe dadurch halbirt. Auch der Halbkreis DGD' wird dadurch halbirt, wie aus der Gleichheit der rechtwinkligen Quadrantendreiecke MGD, MGD' hervorgeht — oder weil DGD' eine ſphär. Sehne des Hauptkreiſes EDF iſt. Daher iſt GD — GB = GD' — GB' d. i. BD = B''D'; mithin auch BD = DB'.

Zuſ. 1. Die Mittelpunkte aller zwiſchen zwei Gegenkreiſen enthaltenen Bogen (von Hauptkreiſen) liegen auf der Peripherie des den Gegenkreiſen parallelen Hauptkreiſes.

Zuſ. 2. Da GD ein Quadrant iſt, ſo iſt BD das Komplement der halben Sehne BB″. Wenn alſo beliebige (sphär.) Sehnen eines Nebenkreiſes um die Komplemente ihrer Hälften verlängert werden; ſo liegen die Endpunkte aller Verlängerungen in dem Hauptkreiſe, der dem Nebenkreiſe parallel iſt.

§. 93. (§. 69a.)

Lehrſatz. Wenn zwei Hauptkreiſe von dem Pole zweier Parallelkreiſe, mit denen ſie ſich ſchneiden, gleichen Abſtand haben; ſo ſind die zwiſchen den Parallelkreiſen enthaltenen Bogen der Hauptkreiſe gleich.

Beweis. Es ſeien (Fig. 42.) AD, A′D′ Bogen zweier Hauptkreiſe und M der Pol (Mittelpunkt) zweier Parallelkreiſe AA′, BB′; mit denen ſich jene ſchneiden. Da AD, AD′ gleich weit von M entfernt ſind, ſo ſind die von M auf dieſelben gefällten Perpendikel ME, ME′ gleich; daher auch die Sehne BC=B′C′; AD=A′D′; folglich, da E, E′ die Mittelpunkte der Sehnen ſind, EB=E′B′; EA=E′A′. Hieraus folgt, daß AB=A′B′ = CD=C′D′ iſt.

Zuſ. 1. Der Satz gilt offenbar nicht nur von zwei, ſondern von beliebig viel Hauptkreiſen.

Zuſ. 2. Wenn die Hauptkreiſe gleichen Abſtand vom Mittelpunkte M haben, ſo ſtehen auch ihre Pole gleich weit von M; und umgekehrt. Die Polentfernung iſt aber das Supplement des Neigungswinkels der Kreiſe: daher läßt ſich der Satz auch ſo ausſprechen:

Wenn zwei oder mehr Hauptkreiſe ſich unter gleichen Winkeln mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte der Hauptkreiſe gleich.

Zuſ. 3. Beſchreibt man um M mit dem ſphär. Radius ME einen Kris, ſo berühren dieſen alle um ME von M entfernten Hauptkreiſe; und umgekehrt. Daher ergiebt ſich folgender Ausdruck des Lehrſatzes:

Wenn mehrere Hauptkreiſe einen Nebenkreis berühren, ſo ſind die zwiſchen je zwei demſelben parallelen Kreiſen enthaltenen Bogen derſelben gleich.

Und da die Pole aller berührenden Hauptkreiſe auf dem Polarkreiſe des berührten liegen, ſo folgt:

Wenn mehrere Hauptkreiſe ihre Pole auf der Peripherie eines Nebenkreiſes haben, ſo ſind die zwiſchen je zwei dieſem Nebenkreiſe parallelen Kreiſen enthaltenen Abſchnitte derſelben gleich.

Daß der eine von den Parallelkreiſen ein Hauptkreis oder der Gegenkreis des andern ſein kann, iſt klar.

§. 94. (§. 69. b.)

Lehrſatz. Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe gleich ſind, ſo haben dieſe gleichen Abſtand vom Mittelpunkte der Parallelkreiſe.

Beweis. Iſt AB = A'B' (Fig. 42.); ſo ſind die durch die Radien MA, MB, MA', MB' gebildeten Dreiecke MAB, M'A'B' wegen Gleichheit der Seiten gleich; daher der Winkel ABM = A'B'M und MBD = MB'D'. In den durch die Perpendikel ME, ME' gebildeten rechtwinkligen Dreiecken MBE, MB'E' ſind nun die Hypotenuſen MB, MB' nebſt den anliegenden Winkeln MBE, MB'E'; daher die Dreiecke ſelbſt gleich und ME = ME'; alſo die Kreiſe AD, A'D' gleich weit vom Mittelpunkte M.

Zuſ. 1. Hieraus ergeben ſich die Umkehrungen der Zuſätze des vorigen §.

1) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Bogen mehrerer Hauptkreiſe gleich

ſind; ſo berühren die Hauptkreiſe einen Nebenkreis, der jenen Parallelkreiſen parallel iſt.

2) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe gleich ſind, ſo liegen die Pole der Hauptkreiſe auf einem Nebenkreiſe, der jenen Parallelkreiſen parallel iſt.

3) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe gleich ſind, ſo ſind die Hauptkreiſe unter gleichen Winkeln gegen die Parallelkreiſe geneigt.

§. 95. (§. 69c.)

Lehrſatz. Wenn zwei Hauptkreiſe ungleichen Abſtand von dem Mittelpunkte zweier Parallelkreiſe, mit denen ſie ſich ſchneiden, haben; ſo iſt unter den zwiſchen den Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitten derſelben der zum entfernteren gehörige der größere.

Beweis. Es ſeien (Fig. 43.) ABCD und A'B'C'D' zwei Hauptkreiſe, von denen der letztere weiter vom Mittelpunkte M der Parallelkreiſe abſteht, als ABCD. Zieht man durch A einen dritten Hauptkreis AFG, der mit A'B'D' gleichen Abſtand von M hat; ſo iſt nach §. 93. AF = A'B'. Es iſt aber AF > AB, weil die Sekante AG weiter von M entfernt iſt, als AD (g. S. §. 63, Zuſ. 2.); folglich iſt A'B' > AB.

Zuſ. 1. Der dem Pole M nähere Hauptkreis ABD berührt einen kleineren Parallelkreis desſelben Poles als der entferntere A'B'D'. Dagegen liegt der Pol des erſteren auf der Peripherie eines größeren Polarkreiſes und bildet mit den Parallelkreiſen einen dem Rechten näheren Winkel. Hieraus ergeben ſich die Sätze:

1) Wenn zwei oder mehrere Hauptkreiſe mit zwei Parallelkreiſen ſich ſchneiden, ſo ſind die

zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe, welche kleinere Parallelkreiſe deſſelben Poles berühren, die kleineren.

2) Wenn mehrere Hauptkreiſe mit zwei Parallelkreiſen ſich ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe, deren Pole auf größeren und jenen Parallelkreiſen parallelen Nebenkreiſen liegen, die kleineren.

3) Wenn mehrere Hauptkreiſe ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe die kleineren, deren Neigungswinkel mit den Parallelkreiſen die dem Rechten näheren ſind.

Zuſ. 2. Umgekehrt, wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe ungleich ſind; ſo iſt der zum größeren Abſchnitte gehörige Hauptkreis entfernter vom Pole der Parallelkreiſe, als der andere. Denn iſt $A'B' > AB$; ſo kann $A'D'$ weder näher, noch eben ſo nahe an M ſein, als AD. Daher ſind auch die Umkehrungen vorſtehender Sätze gültig:

1) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten ſind, ſo berühren die zu den größeren gehörigen Hauptkreiſe größere Parallelkreiſe (deſſelben Poles, wie jene zwei Parallelkreiſe).

2) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten ſind, ſo liegen die Pole der zu den größeren gehörigen Hauptkreiſe auf kleineren Parallelkreiſen.

3) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten

ſind, ſo ſind die Neigungswinkel, welche die zu größeren Abſchnitten gehörigen Hauptkreiſe mit den Parallelkreiſen bilden, vom Rechten entfernter (oder ſchiefer).

§. 96.

Erklärung. Wie die zwei Seiten eines Kreiſes (oder einer Ebne) in Bezug auf einen gewiſſen Winkel, welchen derſelbe mit einem andern Kreiſe bildet, in poſitive und negative unterſchieden würden (g. S. §. 10, Anmerk.); ſo kann dieſelbe Unterſcheidung eingeführt werden, in Rückſicht irgend eines gegebenen Punktes auf der Kugelfläche, welchem die eine Seite des Kreiſes zugekehrt, die andere abgekehrt iſt; ſo daß gleichartige Seiten zweier Kreiſe diejenigen heißen, welche jenem Punkte beide zugekehrt, oder beide abgekehrt ſind; ungleichartige aber, von denen die eine zugekehrte, die andere eine abgekehrte iſt.

In dem Folgenden gilt dieſe Benennung von den Seiten zweier Hauptkreiſe, oder ihrer Bogen, in Rückſicht des Poles oder ſphäriſchen Mittelpunktes eines Nebenkreiſes, mit welchem ſich jene ſchneiden, oder auch nicht ſchneiden.

§. 97. (§. 69 d.)

Lehrſatz. Wenn zwei Hauptkreiſe von dem (ſphär.) Mittelpunkte zweier Parallelkreiſe, mit denen ſie ſich ſchneiden, gleich weit entfernt ſind; ſo ſind die zwiſchen den ungleichartigen Seiten der Hauptkreiſe enthaltenen Bogen der Parallelkreiſe einander ähnlich.

Beweis. Die Hauptkreiſe ABD, A′B′D′ (Fig. 44.) ſeien gleich weit von M, dem Pole der Parallelkreiſe BB′CC′ und AA′DD′ entfernt. Zwiſchen den ungleichartigen Seiten, derſelben liegen die Nebenbogen BB′ und AA′, ſo wie CC′ und DD′; deren Aehnlichkeit zu erweiſen iſt. Man ziehe die ſphär. Radien MA, MB, MA′, MB′. Die dadurch ent-

ſtandenen Dreiecke MAB, MA'B' ſind wegen Gleichheit aller Seiten gleich; denn es iſt MA = MA; MB = MB' und nach §. 93. auch AB = A'B'. Daher iſt der Winkel AMB = A'MB'. Addirt man zu dieſen den Winkel BMA', ſo folgt: AMA' = BMB'. Zu gleichen Zentriwinkeln gehören nun ähnliche Bogen; mithin iſt BB' ∾ AA'. Da CC' = BB' und DD' = AA'; ſo iſt auch CC' ∾ DD'.

Schneiden ſich die Hauptkreiſe nicht innerhalb der Parallelkreiſe, wie Fig. 42, ſo ſind BB'C' und AA'D die zwiſchen ungleichartigen Seiten liegenden Bogen, deren Aehnlichkeit durch dieſelben Schlüſſe erhellet.

Zuſ. 1. Aus dem Lehrſatze und aus §. 94. ergeben ſich folgende Sätze:

1) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe gleich ſind — —

oder 2) Wenn zwei Hauptkreiſe, die ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, einen dritten (kleineren) Parallelkreis der letzteren berühren — —

oder 3) Wenn zwei Hauptkreiſe, die ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ihre Pole auf einem dritten Parallelkreiſe der letzteren haben — —

oder 4) Wenn zwei Hauptkreiſe ſich mit zwei Parallelkreiſen unter gleichen Neigungswinkeln ſchneiden — —

ſo ſind die zwiſchen den ungleichartigen Seiten der Hauptkreiſe enthaltenen Bogen der Parallelkreiſe ähnlich.

Daß dieſe Sätze auch von mehr als zwei Hauptkreiſen und Parallelkreiſen gültig ſind, bedarf keiner Auseinanderſetzung.

Zuſ. 2. Es ſeien (Fig. 45.) AEB, A'EB' zwei Hauptkreiſe auf der Kugelfläche AA'BB' und DEC ein dritter

Hauptkreis, der den Winkel AEA' der erſteren halbirt. Beſchreibt man nun um einen willkürlichen Punkt m des halbirenden Kreiſes mehrere Parallelkreiſe aa'd, bb'e, cc'f ſo ſind 1) die zwiſchen je zwei Parallelkreiſe fallenden Abſchnitte von AEB, A'EB' gleich; $ab = a'b'$; $bc = b'c'$. 2) die Bogen der Parallelkreiſe, welche zwiſchen den in Bezug auf m ungleichartigen Seiten derſelben Hauptkreiſe liegen, ſind ähnlich; nämlich $a'd'd \sim b'e \sim c'f$; ſo wie $aa'd \sim bb'e' \sim cc'f'$.

Denn fällt man von m auf AE, A'E die Perpendikel mn, mn' ſo ſind die Dreiecke mnE, mn'E gleich (g. S. §. 30, Zuſ. 2.); daher $mn = mn'$; alſo AEB, A'EB' gleich weit von m entfernt.

Zuſ. 3. Haben aber die Hauptkreiſe (Fig. 44) AD, A'D' ungleiche Entfernung von dem Mittelpunkte M der Parallelkreiſe, ſo ſind die zwiſchen den ungleichartigen Seiten derſelbeu enthaltenen Bogen der letzteren nicht ähnlich und es kann ſowohl der *innere*, als der *äußere* Bogen der relativ größere ſein. Denn iſt 1) A'D' der von M entferntere Kreis, ſo iſt $A'B' > AB$; daher Winkel $A'MB' > AMB$, folglich $BMB' > AMA'$; alſo der *innere* Bogen BB' relativ größer, als AA'. Iſt 2) AD der von M entferntere Kreis, ſo iſt $AB > A'B'$; hieraus folgt, daß der *äußere* Bogen AA' der relativ größere iſt. Nennt man die dem Mittelpunkte oder Pole M zugekehrten Seite der Kreiſe AD, A'D' die *innere*, die abgekehrte, die *äußere* und bemerkt man, daß die Bogen BB', AA' auf der innern Seite von A'D', auf der äußeren von AD liegen, ſo läßt ſich die Bedingung, unter welcher der innere oder der äußere Bogen der relativ größere iſt, ſo ausdrücken:

Liegen die Bogen auf der inneren Seite des entfernteren Hauptkreiſes, ſo iſt der innere Parallelbogen der relativ größere; liegen ſie auf der äußeren Seite des entfernteren, ſo iſt der äußere Bogen der relativ größere.

§. 98. (§. 102 a.)

Lehrſatz. Wenn um den Mittelpunkt eines der Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Parallelogramm liegt, Parallelkreiſe beſchrieben werden; ſo ſind die innerhalb des Parallelogrammes fallenden Bogen derſelben einander ähnlich und die zwiſchen je zwei dieſer Parallelbogen enthaltenen Abſchnitte der Seiten des Parallelogrammes einander gleich.

Beweis. Es ſei ABCD (Fig. 46.) ein ſphäriſches Parallelogramm und um den Mittelpunkt M des durch A, B gehenden Gegenkreiſes ſeien Parallelkreiſe beſchrieben, deren Bogen ab, a′b′ innerhalb des Parallelogrammes liegen. Zunächſt iſt zu zeigen, daß die dem inneren Raume des Parallelogrammes zugekehrten Seiten der Bogen AC, BD in Rückſicht auf M ungleichartig ſind.

Liegt M auf der inneren Seite von BD, ſo fällt der von M nach B gezogene Radius zwiſchen AB und die nach E gehende Verlängerung von BD. Zieht man nun von M′, dem Gegenpunkte von M, den Radius M′C und verlängert AC über C nach F; ſo iſt Winkel ABE = CDF, weil ihre Nebenwinkel als Diagonalwinkel des Parallelogrammes gleich ſind. Ferner iſt der Winkel ABM = DCM′ (g. S. §. 95.); mithin iſt DCM < DCF; daher liegt M′ auf der inneren Seite von AC. Da nun M′C verlängert durch M geht und AC ſich mit M′CM zum zweitenmale nicht zwiſchen C und M ſchneiden kann; ſo liegt M auf der äußeren Seite von AC.

Liegt aber M auf der äußeren Seiten von BD, ſo ergiebt ſich auf dieſelbe Weiſe, daß dann die innere Seite von AC nach M gekehrt iſt. Demnach liegen in jedem Falle die Parallelbogen ab, a′b′ zwiſchen den in Bezug auf M ungleichartigen Seiten von AC und BD. Da nun AC = BD iſt, ſo haben die Hauptkreiſe, zu denen dieſe Bogen gehören, gleichen Abſtand von M; mithin iſt nach §. 97. ab ∼ a′b′ und nach §. 93. aa′ = bb′.

Zuſ. 1. Beſchreibt man um M als Pol einen Hauptkreis, der in G, H die Seiten AC, BD ſchneidet; ſo iſt auch der Bogen GH deſſelben ähnlich den Parallelbogen ab, a′b′; ſo wie dem Nebenbogen AB des um M beſchriebenen Gegenkreiſes.

Zuſ. 2. Nimmt man auf zwei einander gegenüber ſtehenden Seiten AC, BD eines ſphär. Parallelogrammes von den Endpunkten A, B aus, welche zu einer und derſelben dritten Seite AB gehören, gleiche Abſchnitte Aa, Bb; ſo iſt der durch die Theilungspunkte a, b geführte, dem Nebenbogen AB parallele Bogen ab dieſem ähnlich.

§. 99. Zuſätze.

I) (zu §. 51.)

Zuſ. 5. Bezeichnet man den Flächenraum des Polarpolygones mit P′, den Perimeter deſſelben mit p′, den des urſprünglichen mit p; ſo iſt nach Zuſ. 3.

$$P = 2\pi - p' \quad \text{oder} \quad P + p' = 2\pi$$

Da durch 2π die Hälfte der Kugelfläche ausgedrückt wird, ſo kann dieſe Gleichung ſo ausgeſprochen werden:

Die Summe aus dem Flächenraume eines Polygones und dem Perimeter des Polarpolygones iſt der halben Kugelfläche gleich.

Nach demſelben Satze iſt auch $P' + p = 2\pi$; daher $P' + p = P + p'$ und $P' - P = p - p'$ d. h.: Die Differenz der Flächenräume zweier Polarpolygone iſt der Differenz ihrer Perimeter gleich.

II) (Zu §. 74.)

Zuſ. 3. Unter den ſphär. Dreiecken und den Polygonen von gleich viel Seiten, welche in einen Kreis eingeſchrieben werden können, iſt das größte ein regelmäßiges.

Denn iſt ABCD.... (Fig. 47.) das größte unter dieſen Polygonen und daſſelbe wäre nicht gleichſeitig; ſo ſeien AB,

BC zwei auf einander folgende ungleiche Seiten. Beſchreibt man nun über der Sehne AC ein gleichſchenkliges Dreieck AB'C, ſo iſt daſſelbe größer als ABC; daher würde auch das Polygon AB'CD.... > CBCD.... ſein; was gegen die Vorausſetzung ſtreitet. Daher muß ABCD.... gleichſeitig, mithin regelmäßig ſein. — Daß der Beweis von Dreiecken ebenfalls gilt, iſt einleuchtend.

Zuſ. 4. Das regelmäßige Polygon (oder Dreieck) iſt das größte unter allen in demſelben Kreiſe beſchriebenen Polygonen von eben ſo viel Seiten.

Zuſ. 5. Unter den umgeſchriebenen Polygonen (und Dreiecken) von gleich viel Seiten hat das regelmäßige den kleinſten Umfang; ſo wie, umgekehrt, dasjenige unter den umgeſchriebenen, welches den kleinſten Umfang hat, ein regelmäßiges ſein muß.

Denn iſt P ein umgeſchriebenes regelmäßiges Polygon, ſo iſt das Polarpolygon p deſſelben ein eingeſchriebenes regelmäßiges. Der Flächenraum von p iſt nun ein Maximum; folglich der Umfang von P ein Minimum.

Die Richtigkeit der Umkehrung erhellet eben ſo.

III) (Zu §. 75.)

Zuſ. 8a. Aus der Gleichung $T = 2C + U - \pi = 2C - \overline{U}$ folgt $\frac{1}{2}\overline{U} = C - \frac{1}{2}T$. Da $\frac{1}{2}\overline{U}$ der Winkel iſt, welchen die ſphär. Tangente mit der vom Berührungspunkte ausgezogenen Sehne macht, ſo ergiebt ſich hieraus der Satz:

Der Winkel der Tangente und einer Sehne des Berührungspunktes iſt kleiner, als der auf der entgegengeſetzten Seite der Sehne ſtehende Peripheriewinkel und zwar um den halben Flächenraum des Dreieckes, welches durch die Sehne und die Schenkel des Peripheriewinkels gebildet wird.

IV) (Zu §. 81.)

Zuſ. 2. Unter den in einem Kreiſe beſchriebe-

nen Dreiecken und Polygonen von gleich viel Seiten iſt dasjenige, welches den gröſsten Umfang hat, ein regelmäſsiges.

Denn hat das Polygon ABCD.... (Fig. 47.) den gröſsten Umfang und wären AB, BC zwei auf einander folgende ungleiche Seiten; ſo ſei über der Sehne AC ein gleichſchenkliges Dreieck AB′C beſchrieben. Dann iſt $AB' + B'C > AB + BC$; daher wäre der Umfang von AB′CD.... gröſser, als der von ABCD.... gegen die Vorausſetzung. Mithin iſt die Behauptung evident.

Zuſ. 3. Das regelmäſsige Polygon hat den gröſsten Umfang unter den in demſelben Kreiſe beſchriebene Polygonen von gleicher Seitenzahl; Dreiecke mit eingerechnet.

Zuſ. 4. Unter den um einen Kreis beſchriebenen Polygonen von gleich viel Seiten hat das regelmäſsige den kleinſten Flächenraum; umgekehrt iſt das kleinſte der umgeſchriebenen ein regelmäſsiges.

Der Beweis iſt wie in II) Zuſ. 5.

V) (Zu §. 92.)

Zuſ. 2. Wenn aus n gegebenen Winkeln zwei nſeitige Polygone ſo konſtruirt ſind, daſs jedes einen Kreis berührt; ſo ſind dieſe Kreiſe, ſo wie die Umfänge der Polygone gleich. Denn die Polarpolygone enthalten einerlei Seiten und liegen beide in Kreiſen, die die Polarkreiſe jener ſind. Dieſe Kreiſe ſowohl, als die Flächenräume der eingeſchriebenen Polygone, ſind nun gleich; folglich auch die Umfänge jener Polygone und die Kreiſe, um welche dieſelben beſchrieben ſind.

VI) (Zu §. 93.)

Zuſ. 2. Unter den aus n gegebenen Winkeln zuſammengeſetzten nſeitigen Polygonen hat das einen Kreis berührende den kleinſten Umfang. Umgekehrt, in das aus n gegebenen Winkeln zuſammengeſetzte Polygon vom kleinſten Umfange läſst ſich ein Kreis beſchreiben.

Der Beweis wie oben.

VII) (Zu §. 95.)

Zuſ. 8. Durch den Hauptkreis, welcher zwei Gegenkreiſen eines ſphär. Parallelogrammes parallel iſt, werden die Diagonalen, ſo wie die zwiſchen derſelben Gegenkreiſen liegenden Seiten des Parallelogrammes halbirt. (§. 92.)

Zuſ. 9. Da die Diagonalen des Parallelogrammes ſich gegenſeitig halbiren, ſo liegt der Durchſchnitt und Mittelpunkt derſelben mit den Mittelpunkten je zweier einander gegenüber ſtehender Seiten in einem Hauptkreiſe und zwar in demjenigen, der den Gegenkreiſen, von denen jene Seiten begrenzt werden, parallel iſt.

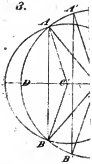
Zuſ. 10. Der Durchſchnittspunkt der Diagonalen iſt auch der Durchſchnitt und Mittelpunkt der beiden Bogen, welche die Mittelpunkte je zweier gegenüber ſtehender Seiten des Parallelogrammes verbinden.

Denn zieht man in dem Parallelogramm ABCD (Fig. 48.) die Diagonale AD und durch die Mittelpunkte F, G der Seiten AC, BD den Bogen FG, der in E ſich mit AD ſchneidet; ſo iſt das Dreieck AEF = DEG, weil AE = ED (Zuſ. 9.) und die anliegenden Winkel gleich ſind. Daher iſt FE = EG; alſo E auch der Mittelpunkt von FG.

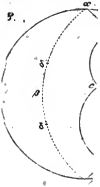
Hieraus folgt daß E auch der Mittelpunkt des Bogens HI iſt, der die Seiten AB, CD halbirt.

Anmerk. Der Punkt E kann daher der Mittelpunkt des Parallelogrammes genannt werden. Er hat übrigens auch die Eigenſchaft, daß jeder durch denſelben geführte Hauptkreis das Parallelogramm halbirt.

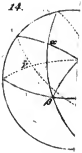
3.

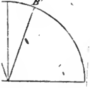


9.



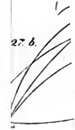
14.

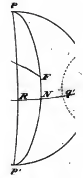




B
B''
27. b.
P
F
R
N
Q'
P'
38.
B

27. b.



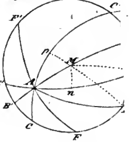


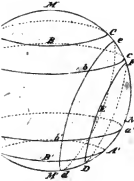
38.

Digitized by Google

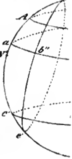
Digitized by Google

48.

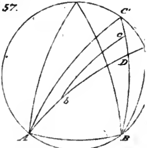


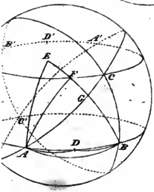


52.



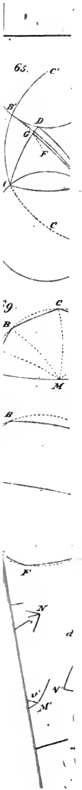
57.





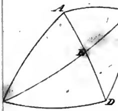
61.

Digitized by Google

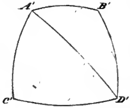


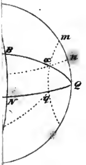
Digitized by Google

77.

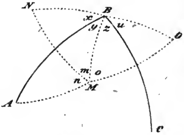


78.

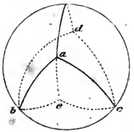




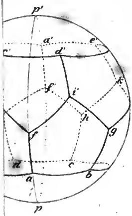
81.



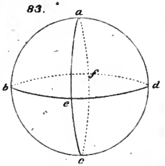
82.



85.



83.

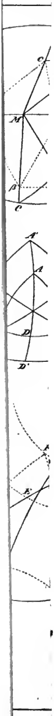


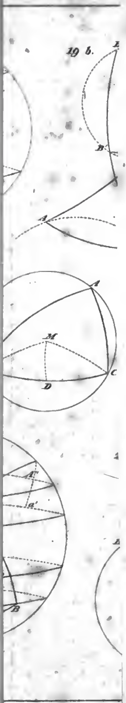
I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

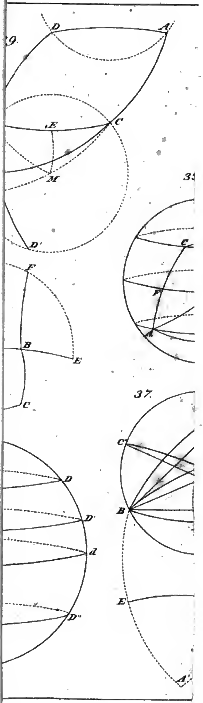
Digitized by Google

II.



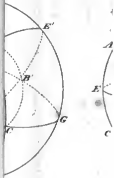

19 b.
B
A
M
C
D
A'
a'
B

II

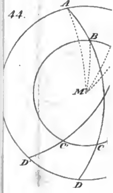


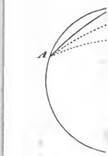
Digitized by Google

Digitized by Google



44.





Digitized by Google

MAY 3 - [illegible]